

О п р е д е л е н и е 1 [1]. Пусть определены метрические пространства X, Y и задано число $\alpha > 0$. Отображение $\Psi: X \rightrightarrows Y$ называется α -накрывающим, а число α — коэффициентом накрывания, если для любых $r \geq 0$, $u \in X$ имеет место вложение

$$B_Y(\Psi(u), \alpha r) \subset \Psi(B_X(u, r)).$$

Свойство α -накрывания равносильно соотношению:

$$\forall u \in X \quad \forall w \in \Psi(u) \quad \forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad \Psi(x) \ni y \quad \& \quad \rho_X(x, u) \leq \alpha^{-1} \rho_Y(y, w). \quad (3)$$

Применение утверждений о накрывающих отображениях к исследованию уравнения (2) встречает трудности, связанные с определением метрики в произведении метрических пространств, относительно которой выполнялись бы условия соответствующих утверждений. Предлагаемый здесь подход не требует метризации произведений метрических пространств. Вместо метрик в $\prod_{i=1}^n X_i$, $\prod_{j=1}^m Y_j$, мы используем векторы $(\rho_{X_1}, \dots, \rho_{X_n})$, $(\rho_{Y_1}, \dots, \rho_{Y_m})$. (подробнее о пространствах с такими «векторными метриками» см., например, ([9], п. 6.3, 6.4)). В терминах этих векторов удастся не только исследовать разрешимость уравнения (2), но и получить оценки отклонения каждой компоненты x_i решения x от соответствующей компоненты u_i^0 заданного вектора $u^0 \in \bar{X}$, что невозможно, если пользоваться классическими результатами о накрывании в метрических пространствах.

1. Основные обозначения и определения

Стандартно обозначаем $\mathbb{R}^m$ — m -мерное вещественное пространство, $\mathbb{R}_+^m$ — конус векторов с неотрицательными компонентами пространства $\mathbb{R}^m$, I_m — единичную $m \times m$ матрицу. Для произвольных векторов $r^1, r^2 \in \mathbb{R}^m$ полагаем $r^1 \geq r^2$, если $r^1 - r^2 \in \mathbb{R}_+^m$; обозначаем $\min\{r^1, r^2\}$ вектор $r = (r_1, \dots, r_m)$, компоненты которого определяются формулой $r_j = \min\{r_j^1, r_j^2\}$, $j = \overline{1, m}$. Напомним, что норму $|\cdot|_{\mathbb{R}^m}$ в $\mathbb{R}^m$ называют монотонной, если для $r^1, r^2 \in \mathbb{R}_+^m$, удовлетворяющих неравенству $r^1 \geq r^2$, выполнено $|r^1|_{\mathbb{R}^m} \geq |r^2|_{\mathbb{R}^m}$.

Пусть заданы метрические пространства X_i, Y_j , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Определим пространства

$$\bar{X} \doteq \prod_{i=1}^n X_i, \quad \bar{Y} \doteq \prod_{j=1}^m Y_j$$

с векторными метриками

$$\bar{\rho}_{\bar{X}} \doteq (\rho_{X_1}, \dots, \rho_{X_n}), \quad \bar{\rho}_{\bar{Y}} \doteq (\rho_{Y_1}, \dots, \rho_{Y_m}). \quad (4)$$

Для $r = (r_1, \dots, r_m) \in \mathbb{R}_+^m$, $w = (w_1, \dots, w_m) \in \bar{Y}$ положим

$$\bar{B}_{\bar{Y}}(w, r) \doteq \{y \in \bar{Y} : \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y, w) \leq r\} = \prod_{j=1}^m B_{Y_j}(w_j, r_j).$$

Аналогично, для $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $u = (u_1, \dots, u_n) \in \bar{X}$ обозначим

$$\bar{B}_{\bar{X}}(u, d) \doteq \prod_{i=1}^n B_{X_i}(u_i, d_i).$$

О п р е д е л е н и е 2. Пусть задана $n \times m$ матрица A с неотрицательными компонентами a_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Отображение $\Psi: \bar{X} \rightrightarrows \bar{Y}$ будем называть векторно A -накрывающим, если

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^m \quad \forall u \in \bar{X} \quad \bar{B}_{\bar{Y}}(\Psi(u), r) \subset \Psi(\bar{B}_{\bar{X}}(u, Ar)). \quad (5)$$

Приведем критерий векторного накрывания.

Предложение 1. *Отображение $\Psi: \bar{X} \rightrightarrows \bar{Y}$ является векторно A -накрывающим тогда и только тогда, когда*

$$\forall u \in \bar{X} \quad \forall w \in \Psi(u) \quad \forall y \in \bar{Y} \quad \exists x \in \bar{X} \quad \Psi(x) \ni y \quad \& \quad \bar{\rho}_{\bar{X}}(x, u) \leq A\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y, w). \quad (6)$$

Докажем это утверждение. Пусть, сначала, выполнено свойство (6). Для произвольных $r \in \mathbb{R}_+^m$, $u \in \bar{X}$, $y \in \bar{B}_{\bar{Y}}(\Psi(u), r)$ определим $w \in \Psi(u)$ так, чтобы $\rho_Y(y, w) \leq r$. Согласно (6) найдем x , отвечающий условиям $\Psi(x) \ni y$, $\bar{\rho}_{\bar{X}}(x, u) \leq Ar$. Таким образом, справедливо вложение (5). Обратно, пусть отображение Ψ является векторно A -накрывающим. Для любых $u \in \bar{X}$, $w \in \Psi(u)$, $y \in \bar{Y}$ определим $r \doteq \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y, w)$. Тогда $y \in \bar{B}_{\bar{Y}}(\Psi(u), r) \subset \Psi(\bar{B}_{\bar{X}}(u, Ar))$, т. е. существует $x \in \bar{B}_{\bar{X}}(u, Ar)$, удовлетворяющий соотношениям $\Psi(x) \ni y$, $\bar{\rho}_{\bar{X}}(x, u) \leq Ar = A\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y, w)$.

Очевидно, что в случае $n = m = 1$ определения 1, 2 равносильны: всякое векторно A -накрывающее отображение является α -накрывающим и любое α -накрывающее отображение является векторно A -накрывающим, где $A = (a_{11})$, $a_{11} = \alpha^{-1}$.

Определение векторного накрывания, естественно, применимо и к однозначным отображениям: отображение $\psi: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ будем полагать векторно A -накрывающим, если отображение $\Psi: \bar{X} \rightrightarrows \bar{Y}$, $\Psi(x) = \{\psi(x)\}$ векторно A -накрывающее согласно определению 2.

Требование накрывания во многих задачах является излишне жестким, многие результаты удастся получить при менее ограничительных условиях локального накрывания [6]–[8]. Определим векторный аналог такого понятия.

Итак, пусть заданы множества $W \subset \bar{Y}$, $\mathfrak{A} \subset \bar{X} \times \mathbb{R}_+^m$ и $n \times m$ матрица A с неотрицательными компонентами a_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

Определение 3. Отображение $\Psi: \bar{X} \rightrightarrows \bar{Y}$ будем называть *векторно A -накрывающим множество W на совокупности $\mathfrak{A}$* , если для любых $(u, r) \in \mathfrak{A}$ имеет место включение

$$\bar{B}_{\bar{Y}}(\Psi(u), r) \cap W \subset \Psi(\bar{B}_{\bar{X}}(u, Ar)).$$

Предложение 2. *Отображение $\Psi: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ является векторно A -накрывающим множество W на совокупности $\mathfrak{A}$, тогда и только тогда, когда*

$$\forall u \in \bar{X} \quad \forall w \in \Psi(u) \quad \forall y \in W \\ (u, \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y, w)) \in \mathfrak{A} \implies \exists x \in \bar{X} \quad \Psi(x) \ni y \quad \& \quad \bar{\rho}_{\bar{X}}(x, u) \leq A\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y, w).$$

Доказательство этого утверждения повторяет приведенное выше доказательство предложения 1.

Определение 3 естественным образом распространяется и на однозначное отображение $\psi: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$, следует просто применить это определение к соответствующему многозначному отображению, равному $\Psi(x) = \{\psi(x)\}$.

В скалярном случае, т. е. при $n = m = 1$, $A = (a_{11})$, определение 3 равносильно предложенному в [8] определению отображения $\Psi: X \rightrightarrows Y$, α -накрывающего множество $W \subset Y$ на совокупности $\mathfrak{G} \subset X \times \mathbb{R}_+$, где $\alpha = a_{11}^{-1}$, $\mathfrak{G} = \{(x, r) : (x, \alpha^{-1}r) \in \mathfrak{A}\}$. В свою очередь определение [8] — это многозначный аналог определения из работы [6]. В связи с этим отметим, что при соответствующем выборе множеств $W, \mathfrak{G}$ цитируемым определениям [6], [8] удовлетворяют различные трактовки понятия накрывания однозначных и многозначных отображений, предлагавшиеся многими авторами. Здесь в качестве $\mathfrak{A} \subset \bar{X} \times \mathbb{R}_+^m$ будем выбирать множество, определяемое по заданным векторам $u^0 \in \bar{X}$, $R \in \mathbb{R}_+^n$ равенством

$$\hat{\mathfrak{A}}(u^0, R) \doteq \{(x, r) \in \bar{X} \times \mathbb{R}_+^m : x \in \bar{B}_{\bar{X}}(u^0, R), Ar + \bar{\rho}_{\bar{X}}(x, u^0) \leq R\}. \quad (7)$$

Применительно к такому заданию совокупности $\mathfrak{A}$ определение 3 означает, что отображение $\Psi: \bar{X} \rightrightarrows \bar{Y}$ является векторно A -накрывающим множество W на совокупности $\mathfrak{A}(u^0, R)$ тогда и только тогда, когда

$$\forall u \in \bar{B}_{\bar{X}}(u^0, R) \quad \forall w \in \Psi(u) \quad \forall y \in W \\ A\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y, w) + \bar{\rho}_{\bar{X}}(u, u^0) \leq R \implies \exists x \in \bar{X} \quad \Psi(x) \ni y \quad \& \quad \bar{\rho}_{\bar{X}}(x, u) \leq A\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y, w). \quad (8)$$

Напомним определения еще нескольких понятий, необходимых для формулировки утверждения о разрешимости системы (1).

Под сходимостью $x^k \rightarrow x$ при $k \rightarrow \infty$ в пространстве $\bar{X}$ понимаем сходимость последовательностей компонент данных векторов, т. е. $\rho_{X_i}(x_i^k, x_i) \rightarrow 0$, $i = \overline{1, n}$, что равносильно сходимости $\bar{\rho}_{\bar{X}}(x^k, x) \rightarrow 0$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Аналогично понимаем сходимость в произведениях любых метрических пространств (в том числе, в $\bar{Y}$ и в $\bar{X} \times \bar{Y}$). Естественным образом определяем замкнутость множеств в произведениях пространств. Соответственно, множество $V \subset \bar{X} \times \bar{Y}$ называем замкнутым, если для любой последовательности векторов $(x_1^k, \dots, x_n^k, y_1^k, \dots, y_m^k)$, $k = 1, 2, \dots$ из множества V , компоненты которых при $k \rightarrow \infty$ сходятся: $\rho_{X_i}(x_i^k, \xi_i) \rightarrow 0$, $i = \overline{1, n}$, $\rho_{Y_j}(y_j^k, w_j) \rightarrow 0$, $j = \overline{1, m}$, «предельный» вектор $(\xi_1, \dots, \xi_n, w_1, \dots, w_m)$ также принадлежит V . Множество V будем называть полным подпространством пространства $\bar{X} \times \bar{Y}$, если сходится (к элементу из V) произвольная последовательность векторов, компоненты которых образуют фундаментальные последовательности в соответствующих метрических пространствах.

Для отображения $\Psi: \bar{X} \rightrightarrows \bar{Y}$ стандартно определяем *график* — множество

$$\text{gph}(\Psi) = \{(x, y) \in \bar{X} \times \bar{Y} : y \in \Psi(x)\}.$$

О п р е д е л е н и е 4. Пусть задана $m \times n$ матрица B с неотрицательными компонентами b_{ji} , $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$. Отображение $\Phi: \bar{X} \rightrightarrows \bar{Y}$ будем называть *векторно B -липшицевым относительно множества $W \subset \bar{Y}$ на множестве $U \subset \bar{X}$* , если для любых $u, x \in U$ выполнено

$$\Phi(x) \cap W \subset \bar{B}_{\bar{Y}}(\Phi(u), B\bar{\rho}_{\bar{X}}(x, u)). \quad (9)$$

Естественно, однозначное отображение $\varphi: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ называем векторно B -липшицевым относительно множества W на множестве U , если определению 4 удовлетворяет соответствующее многозначное отображение, определяемое равенством $\Phi(x) = \{\varphi(x)\}$. Это означает, что для любых $u, x \in U$, таких что $\varphi(x) \in W$, выполнено $\bar{\rho}_{\bar{Y}}(\varphi(x), \varphi(u)) \leq B\bar{\rho}_{\bar{X}}(x, u)$.

Векторно B -липшицево относительно $\bar{Y}$ на всем $\bar{X}$ отображение будем называть *векторно B -липшицевым*.

В случае, если $W \doteq \prod_{j=1}^m W_j$, $U \doteq \prod_{i=1}^n U_i$, где $W_j \subset Y_j$, $U_i \subset X_i$, определение 4 означает, что для произвольного $l = \overline{1, n}$, любых векторов $u, x \in U$, компоненты которых u_i, x_i при всех $i \neq l$ совпадают, при всех $j = \overline{1, m}$ выполнено

$$\Phi_j(x) \cap W_j \subset \bar{B}_{Y_j}(\Phi_j(u), b_{jl}\rho_{X_l}(x_l, u_l)). \quad (10)$$

Отметим, что вложение (9) равносильно соотношению

$$\forall y \in \Phi(x) \cap W \quad \exists z \in \Phi(u) \quad \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y, z) \leq B\bar{\rho}_{\bar{X}}(x, u),$$

соответственно, вложение (10) — соотношению

$$\forall y_j \in \Phi_j(x) \cap W_j \quad \exists z_j \in \Phi_j(u) \quad \rho_{Y_j}(y_j, z_j) \leq b_{jl}\rho_{X_l}(x_l, u_l).$$

2. Теорема о точке совпадения двух отображений

Сформулируем основное утверждение статьи — векторный аналог теоремы А.В. Арутюнова о точке совпадения двух многозначных отображений.

Т е о р е м а 1. Пусть заданы отображения $\Psi, \Phi: \bar{X} \rightrightarrows \bar{Y}$, элементы $u^0 \in \bar{X}$, $y^0 \in \Psi(u^0)$, $y^1 \in \Phi(u^0)$, векторы $R \in \mathbb{R}_+^n$, $d \in \mathbb{R}_+^m$, $n \times m$ матрица A и $m \times n$ матрица B такие, что:

(а) Ψ является векторно A -накрывающим множеством $W \doteq \bar{B}_{\bar{Y}}(y^0, d)$ на совокупности $\hat{\mathfrak{A}}(u^0, R)$;

(б) Φ является векторно B -липшицевым относительно множества W на множестве $U \doteq \bar{B}_{\bar{X}}(u^0, R)$;

(с) для спектрального радиуса ϱ матрицы BA выполнено $\varrho(BA) < 1$;

(д) имеют место неравенства

$$r \doteq (I_m - BA)^{-1} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) \leq d, \quad Ar \leq R.$$

(е) множества $\text{gph}(\Psi) \cap (U \times W)$, $\text{gph}(\Phi) \cap (U \times W)$ замкнуты и по крайней мере одно из них является полным подпространством пространства $\bar{X} \times \bar{Y}$.

Тогда существует решение $x = \xi \in \bar{X}$ системы (1), удовлетворяющее оценке

$$\bar{\rho}_{\bar{X}}(\xi, u^0) \leq Ar. \quad (11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале оценим матрицу $(I_m - BA)^{-1}$. Эта матрица является суммой ряда $I_m + BA + (BA)^2 + \dots$ (см., например, [10], с. 116). Из неотрицательности элементов матриц A, B следует, что при любом $k = 0, 1, 2, \dots$ выполнено

$$(I_m - BA)^{-1} \geq I_m + BA + \dots + (BA)^k \quad (12)$$

(неравенство для матриц понимается, естественно, как неравенство для всех соответствующих элементов).

Покажем, что существуют последовательности $\{x^k\} \subset \bar{X}$, $\{y^k\} \subset \bar{Y}$, отвечающие следующим требованиям: $x^0 = u^0$;

$$\forall k = 1, 2, \dots \quad x^k \in U, \quad y^k \in \Psi(x^k) \cap \Phi(x^{k-1}) \cap W \neq \emptyset, \\ \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^k, y^{k-1}) \leq (BA)^{k-1} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1), \quad \bar{\rho}_{\bar{X}}(x^k, x^{k-1}) \leq A(BA)^{k-1} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1). \quad (13)$$

Проверим справедливость этого утверждения при $k = 1$. В данном случае первое из неравенств (13) тривиально: $\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^1, y^0) \leq \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1)$.

Положим $x^0 \doteq u^0$. Для $u \doteq x^0$, $w \doteq y^0 \in \Psi(x^0)$, $y \doteq y^1 \in \Phi(x^0)$ выполнено условие импликации (8). Действительно, во-первых, в силу неравенства (12) имеем $\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) \leq (I_m - BA)^{-1} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1)$, т. е. $\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) \leq d$, $y^1 \in W$; во-вторых,

$$\bar{\rho}_{\bar{X}}(u^0, u) + A \bar{\rho}_{\bar{Y}}(w, y) = A \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) \leq A(I_m - BA)^{-1} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) = Ar \leq R.$$

В силу предположения (а) согласно (8), существует $x^1 \in \bar{X}$ удовлетворяющий включению $\Psi(x^1) \ni y^1$ и неравенству $\bar{\rho}_{\bar{X}}(x^1, x^0) \leq A \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^1, y^0)$. Из последнего неравенства, согласно (12), следует $\bar{\rho}_{\bar{X}}(x^1, x^0) \leq R$, т. е. $x^1 \in U$. Кроме того, установлено соотношение $y^1 \in \Psi(x^1) \cap \Phi(x^0) \cap W$ (из которого очевидно следует, что $\Psi(x^1) \cap \Phi(x^0) \cap W \neq \emptyset$).

Предполагая, что соотношения (13) имеют место при всех $k \leq k_0$, докажем их справедливость при $k = k_0 + 1$. Вследствие условия (б) существует $y^{k_0+1} \in \Phi(x^{k_0})$, удовлетворяющий

оценке $\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^{k_0+1}, y^{k_0}) \leq B \bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k_0}, x^{k_0-1})$. Отсюда, в силу предположений индукции, получаем $\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^{k_0+1}, y^{k_0}) \leq BA(BA)^{k-1} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1)$. Таким образом, первое из неравенств (13) при $k = k_0 + 1$ справедливо.

Проверим условие импликации (8) для $u \doteq x^{k_0}$, $w \doteq y^{k_0}$, $y \doteq y^{k_0+1}$. Во-первых, имеем

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^{k_0+1}) &\leq \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) + \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^1, y^2) + \dots + \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^{k_0}, y^{k_0+1}) \leq \\ &\leq \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) + B(\bar{\rho}_{\bar{X}}(x^0, x^1) + \dots + \bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k_0-1}, x^{k_0})) \leq \\ &\leq \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) + B(A + A(BA) + \dots + A(BA)^{k_0-1}) \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) = \\ &= (I_m + BA + \dots + (BA)^{k_0}) \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1), \end{aligned} \quad (14)$$

следовательно $\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^{k_0+1}) \leq (I_m - BA)^{-1} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) \leq d$, т. е. $y^{k_0+1} \in W$. Во-вторых, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{\bar{X}}(u^0, u) + A \bar{\rho}_{\bar{Y}}(w, y) &\leq \bar{\rho}_{\bar{X}}(x^0, x^1) + \dots + \bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k_0-1}, x^{k_0}) + A \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^{k_0}, y^{k_0+1}) \leq \\ &\leq \bar{\rho}_{\bar{X}}(x^0, x^1) + \dots + \bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k_0-1}, x^{k_0}) + AB \bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k_0-1}, x^{k_0}) \leq \\ &\leq A(I_m + \dots + (BA)^{k_0-1} + (BA)^{k_0}) \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) \leq A(I_m - BA)^{-1} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) \leq R. \end{aligned}$$

Таким образом, вследствие условия **(а)** существует $x^{k_0+1} \in \bar{X}$, удовлетворяющий соотношениям $\Psi(x^{k_0+1}) \ni y^{k_0+1}$, $\bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k_0+1}, x^{k_0}) \leq A \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^{k_0+1}, y^{k_0})$. Для этого элемента, учитывая **(б)** и предположения индукции, получаем оценку

$$\bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k_0+1}, x^{k_0}) \leq AB \bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k_0}, x^{k_0-1}) \leq A(BA)^{k_0} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1).$$

Из данного неравенства следует, что

$$\bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k_0+1}, x^0) \leq A(I_m + \dots + (BA)^{k_0}) \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) \leq A(I_m - BA)^{-1} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1), \quad (15)$$

поэтому $\bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k_0+1}, x^0) \leq R$, т. е. $x^{k_0+1} \in U$. Кроме того, установлено включение $y^{k_0+1} \in \Psi(x^{k_0+1}) \cap \Phi(x^{k_0}) \cap W$.

Итак, определены последовательности $\{x^k\} \subset \bar{X}$, $\{y^k\} \subset \bar{Y}$, удовлетворяющие соотношениям (13). Компоненты x_i^k векторов первой последовательности при каждом $i = \overline{1, n}$ образуют в X_i фундаментальную последовательность. Действительно, из **(с)** следует сходимость $\|(BA)^k\|_{\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$; таким образом

$$\begin{aligned} \forall l = 1, 2, \dots \quad \bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k+l}, x^k) &\leq A(BA)^k (I_m + \dots + (BA)^{l-1}) \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) \leq \\ &\leq A(BA)^k (I_m - BA)^{-1} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) \rightarrow 0, \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что в Y_i фундаментальной является последовательность $\{y_i^k\}$, $i = \overline{1, n}$.

Так как, согласно условию **(е)**, по крайней мере одна из фундаментальных последовательностей $\{(x^k, y^k)\} \subset \text{grph}(\Psi) \cap (U \times W)$, $\{(x^{k-1}, y^k)\} \subset \text{grph}(\Phi) \cap (U \times W)$ принадлежит полному подпространству, то существуют $\xi \in U$, $y \in W$, $\xi \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} x^k$, $y \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} y^k$. Из неравенства (15) получаем оценку (11). Вследствие замкнутости множеств $\text{grph}(\Psi) \cap (U \times W)$, $\text{grph}(\Phi) \cap (U \times W)$, выполнено $y \in \Psi(\xi)$, $y \in \Phi(\xi)$. Таким образом, ξ является искомым решением системы (1). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. В формулировке теоремы 1 можно заменить матрицу BA матрицей AB . Действительно, ненулевые собственные значения, а следовательно, и спектральные радиусы этих матриц совпадают (см. [11], с. 196). Кроме того, так как $\rho(AB) = \rho(BA) < 1$, то

$$\begin{aligned} A(I_m - BA)^{-1} &= A(I_m + BA + (BA)^2 + \dots) = A + ABA + ABABA + \dots = \\ &= (I_n + AB + (AB)^2 + \dots)A = (I_n - AB)^{-1}A. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 2. В теореме 1 в случае $W = \bar{Y}$ из предположения **(d)** можно удалить первое неравенство, а если $U = \bar{X}$, то лишним становится второе неравенство в **(d)**. Таким образом, если отображение $\Psi: \bar{X} \rightrightarrows \bar{Y}$ является векторно A -накрывающим, то для утверждения теоремы 1 условие **(d)** не требуется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов А. В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
2. Арутюнов А. В. Устойчивость точек совпадения и многозначные накрывающие отображения в метрических пространствах // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427. № 5 С. 583–585.
3. Арутюнов А. В. Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Математические заметки. 2009. Т. 86. № 2. С. 163–169.
4. Арутюнов А. В. Точки совпадения двух отображений // Функциональный анализ и его приложения. 2014. Т. 48. № 1. С. 89–93.
5. Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E. Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. Iss. 3. P. 1026–1044.
6. Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е. О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.
7. Жуковский Е. С., Плужникова Е. А. Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 31–56.
8. Aram Arutyunov, Valeriano Antunes de Oliveira, Fernando Lobo Pereira, Evgeniy Zhukovskiy and Sergey Zhukovskiy On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2014. P. 1–17. doi:10.1080/00036811.2014.891732
9. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рунтцкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
10. Крейн С. Г., Вилленкин Н. Я., Горин Е. А. (Под общей редакцией С. Г. Крейна) Функциональный анализ. СМБ. М.: Наука, 1972.
11. Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры М.: Наука, Издательство Физико-математической литературы, 2008.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00877), государственной программы Министерства образования и науки РФ № 2014/285 (проект № 2476).

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Борзова Марина Васильевна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, инженер научно-образовательного центра «Фундаментальные математические исследования», e-mail: bmv_1603@mail.ru

Жуковская Татьяна Владимировна, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики, e-mail: zukovskys@mail.ru

UDC 517.988.6, 517.922

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-363-370

ON COVERING OF SET-VALUED MAPPINGS IN CARTESIAN PRODUCTS OF METRIC SPACES

© M. V. Borzova, T. V. Zhukovskaia, E. S. Zhukovskiy

For set-valued mappings acting in Cartesian product of metric spaces, the concept of vector-covering is defined. The vector analog of the Arutyunov coincidence point theorem is proved for set-valued mappings.

Key words: coincidence points; vector-covering mapping; Cartesian product of metric spaces.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 14-01-00877) and by the state program of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation № 2014/285 (project № 2476).

REFERENCES

1. *Arutyunov A. V.* Nakryvayushchie otobrazheniya v metricheskikh prostranstvakh i nepodvizhnye tochi // Doklady Akademii nauk. 2007. T. 416. № 2. S. 151–155.
2. *Arutyunov A. V.* Ustojchivost' tochek sovpadeniya i mnogoznachnye nakryvayushchie otobrazheniya v metricheskikh prostranstvakh // Doklady Akademii nauk. 2009. T. 427. № 5 S. 583–585.
3. *Arutyunov A. V.* Ustojchivost' tochek sovpadeniya i svoystva nakryvayushchih otobrazhenij // Matematicheskie zametki. 2009. T. 86. № 2. S. 163–169.
4. *Arutyunov A. V.* Tochi sovpadeniya dvuh otobrazhenij // Funktsional'nyy analiz i ego prilozheniya. 2014. T. 48. № 1. S. 89–93.
5. *Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. Iss. 3. P. 1026–1044.
6. *Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E.* O korrektnosti differentsial'nykh uravnenij, ne razreshennykh otноситel'no proizvodnoj // Differentsial'nye uravneniya. 2011. T. 47. № 11. S. 1523–1537.
7. *Zhukovskiy E. S., Pluzhnikova E. A.* Ob upravlenii ob"ektami, dvizhenie kotorykh opisyyaetsya neyavnyimi nelinejnymi differentsial'nymi uravneniyami // Avtomatika i telemekhanika. 2015. № 1. S. 31–56.
8. *Aram Arutyunov, Valeriano Antunes de Oliveira, Fernando Lobo Pereira, Evgeniy Zhukovskiy and Sergey Zhukovskiy* On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2014. P. 1–17. doi:10.1080/00036811.2014.891732
9. *Krasnosel'skiy M. A., Vainikko G. M., Zabrejko P. P., Rutitskiy YA. B., Stecenko V. YA.* Priblizhennoe reshenie operatornykh uravnenij. M.: Nauka, 1969.
10. *Krejn S. G., Vilenkin N. YA., Gorin E. A. (Pod obshchej redakciej S.G. Krejna)* Funktsional'nyy analiz. SMB. M.: Nauka, 1972.
11. *Prasolov V. V.* Zadachi i teoremy linejnoy algebry M.: Nauka, Izdatel'stvo Fiziko-matematicheskoy literatury, 2008.

Received 21 March 2016.

Borzova Marina Vasilevna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Engineer of the Research Center «Fundamental Mathematical Research», e-mail: bmv_1603@mail.ru

Zhukovskaia Tatyana Vladimirovna, Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor of High Mathematics Department, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics, e-mail: zukovskys@mail.ru