УДК 517.911, 517.968
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2062-2067

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ СОСТОЯНИЯ ФАЗОВОЙ ТРАЕКТОРИИ

© **О. В. Филиппова**

Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: philippova.olga@rambler.ru

Исследована краевая задача для функционально-дифференциального включения включения, порожденного многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений в пространстве суммируемых функций, с импульсными воздействиями, зависящими от состояния фазовой траектории в момент воздействия. Введено понятие обобщенного решения такой задачи. Найдены условия существования обобщенного решения краевой задачи. Предложен способ нахождения приближенного решения и дана оценка погрешности приближенного решения.

Ключевые слова: импульсное функционально-дифференциальное включение; краевая задача; выпуклость по переключению

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ n-мерное пространство вектор-столбцов с евклидовой нормой $|\cdot|$; $\rho_{\mathbf{X}}[x;U]$ – расстояние от точки $x\in\mathbf{X}$ до множества $U\subset\mathbf{X}$ в метрическом пространстве $\mathbf{X}$; $h^+_{\mathbf{X}}[U_1;U]\equiv\sup\limits_{x\in U_1}\rho_{\mathbf{X}}[x,U]$ – полуотклонение по Хаусдорфу множества $U_1\subset\mathbf{X}$ от множества U в пространстве X; $h_X[U_1;U]=\max\{h^+_X[U_1;U];h^+_X[U;U_1]\}$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами U_1 и U в пространстве $\mathbf{X}$; $\mathbf{L}^n[a,b]$ – пространство суммируемых по Лебегу функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{L}^n[a,b]}=\int\limits_a^b|x(s)|ds$; $Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ – множество всех непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$.

Пусть $t_k\in[a,b]$, $k=1,2,\ldots,m$, $(a<t_1<\ldots<t_m<b)$ – конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ $(\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b])$ множество всех непрерывных (абсолютно-непрерывных) на каждом из промежутков $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $\ldots$, $(t_m,b]$ функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k=1,2,\ldots,m$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}=\sup\{|x(t)|:\ t\in[a,b]\}$ $(\|x\|_{\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b]}=|x(a)|+$ $+\ \|\dot{x}\|_{\mathbf{L}^n[a,b]}+\sum\limits_{k=1}^m|\Delta(x(t_k))|$, где $\Delta(x(t_k))=x(t_k+0)-x(t_k)$, $k=1,2,...,m$).

Пусть $y\in\mathbf{L}^n[a,b]$, $\beta_k,\alpha\in\mathbb{R}^n$. Рассмотрим вначале линейную краевую задачу для функционально-дифференциального уравнения следующего вида:

$$\mathcal{L}x=y,\ \Delta(x(t_k))=\beta_k,\ k=1,2,\ldots,m; \tag{1}$$

$$lx=\alpha, \tag{2}$$

где $\mathcal{L}:\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b]\to\mathbf{L}^n[a,b]$ – линейное непрерывное отображение, $l:\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b]\to\mathbb{R}^n$ – линейный непрерывный вектор-функционал.

Пусть задача $(1),(2)$ однозначно разрешима. Тогда ее решение представимо в виде

$$x = X\alpha + Gy + \sum_{k=1}^{m} G_k \beta_k, \tag{3}$$

где X – фундаментальная матрица решений однородного уравнения

$$\mathcal{L}x = 0, \quad \Delta(x(t_k)) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

при условии, что $l(X) = E$, E – единичная $n \times n$ матрица; $(Gy)(t) = \int\limits_a^b G(t,s)y(s)ds$ – оператор Грина $G : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{D}^n[a,b]$ с ядром $G(t,s)$, называемым матрицей Грина; $G_k(t) = \chi_{(t_k,b]}(t) \int\limits_a^b G(t_k,s)ds$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $\chi_{\mathcal{U}}(\cdot)$ – характеристическая функция множества $\mathcal{U}$.

Применим представление (3) решения задачи $(1),(2)$ к исследованию краевой задачи для импульсного функционально-дифференциального включения

$$\mathcal{L}x \in \Phi(x), \ \Delta(x(t_k)) = I_k(x(t_k)), \ k = 1, 2, \ldots, m; \tag{4}$$

$$lx \in \varphi(x), \tag{5}$$

где $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$; $\varphi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$; $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Согласно представлению (3), задача (4),(5) эквивалентна включению

$$x \in X\varphi(x) + G\Phi(x) + \sum_{k=1}^{m} G_k I_k(x(t_k)).$$

Приведем необходимые определения и обозначения.

Пусть Φ – непустое подмножество пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$. Выпуклой по переключению оболочкой $sw\Phi$ множества Φ, называется совокупность всех элементов вида $y = \sum\limits_{i=1}^{l} \chi_{\mathcal{U}_i} x_i$, где $x_i \in \Phi$, l – любое натуральное число, а произвольные измеримые множества $\mathcal{U}_i$, $i = 1, 2, ..., l$, осуществляют разбиение отрезка $[a,b]$, т. е. $\mathcal{U}_i \bigcap \mathcal{U}_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{l} \mathcal{U}_i = [a,b]$. Пусть далее, $\overline{sw}\Phi$ замыкание множества $sw\Phi$ в пространстве $\mathbf{L}^n[a,b]$.

Под ***обобщенным решением задачи*** (4),(5) понимается функция $x \in \widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b]$, удовлетворяющая соотношениям

$$\mathcal{L}x \in \overline{sw}\Phi(x), \ \Delta(x(t_k)) = I_k(x(t_k)), \ k = 1, 2, \ldots, m,$$

$$lx \in \varphi(x).$$

Отметим, что если x - обобщенное решение задачи (4),(5), то существуют такие $z \in \varphi(x)$ и $v \in \overline{sw}\Phi(x)$, что

$$x = Xz + Gv + \sum_{k=1}^{m} G_k I_k(x(t_k)).$$

Будем называть данную функцию $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ фазовой траекторией задачи (4),(5).

Пусть $q_0 \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $z_0 \in \varphi(q_0)$, $v_0 \in \mathbf{L}^n[a,b]$. Представим функцию q_0 в виде

$$q_0 = Xz_0 + Gv_0 + \sum_{k=1}^{m} G_k I_k(q_0(t_k)) + e, \tag{6}$$

где $e = q_0 - Xz_0 - Gv_0 - \sum\limits_{k=1}^{m} G_k I_k(q_0(t_k))$.

Будем говорить, что "импульсные воздействия" $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *обладают свойством* $\mathcal{A}$, если найдутся такие непрерывные неубывающие функции $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$, удовлетворяющие равенству $\widetilde{I}_k(0) = 0$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется оценка

$$|I_k(x) - I_k(y)| \leqslant \widetilde{I}_k(|x-y|), \quad k = 1, 2, ..., m.$$

Пусть далее для функции $v_0 \in \mathbf{L}^n[a,b]$ существует функция $\kappa \in \mathbf{L}^1[a,b]$ такая, что для любого измеримого $\mathcal{U} \in [a,b]$ выполняется

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v_0, \overline{sw}\Phi(q_0)] \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} \kappa(s)ds. \tag{7}$$

Определим функцию $\omega \in \mathbf{C}^1_+[a,b]$ равенством

$$\omega(t) = \int\limits_a^b |G(t,s)|\kappa(s)ds + |e(t)| + \sum_{k=1}^{m} G_k \widetilde{I}_k(\omega(t_k)), \tag{8}$$

где $|G(t,s)|$, $|e(t)|$ – норма в пространстве $\mathbb{R}^n$ матриц $G(t,s)$ и $e(t)$.

Будем считать, что для любого измеримого $\mathcal{U} \in [a,b]$ и любых $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ существует такая функция $\kappa_\Phi \in \mathbf{L}^1[a,b]$ и такое $\kappa_\varphi \geqslant 0$, что

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(x), \Phi(y)] \leqslant \|x-y\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n(\mathcal{U})} \int\limits_{\mathcal{U}} \kappa_\Phi(s)ds; \tag{9}$$

$$h_{\mathbb{R}^n}[\varphi(x), \varphi(y)] \leqslant \kappa_\varphi \|x-y\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}; \tag{10}$$

$$\max_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |G(t,s)|\kappa_\Phi(s)ds + \kappa_\varphi \max_{t\in[a,b]} |X(t)| < 1. \tag{11}$$

Пусть для функции $\omega \in \mathbf{C}^1_+[a,b]$, определенной соотношением (8), равномерно сходится ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i \omega, \tag{12}$$

где $\mathcal{A}^0\omega = \omega$, $\mathcal{A}^i\omega = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}^{i-1}\omega\right)$, $i = 1, 2, \ldots$, а непрерывный оператор $\mathcal{A} : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbf{C}^1_+[a,b]$ определен равенством

$$\left(\mathcal{A}\widetilde{\omega}\right)(t) = \left(\int\limits_a^b |G(t,s)|\kappa_\Phi(s)ds + \kappa_\varphi\right) \|\widetilde{\omega}\|.$$

Пусть $\xi(\omega)$ – сумма ряда (12), то есть

$$\xi(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i \omega. \tag{13}$$

Для любой функции $\widetilde{\omega} \in \mathbf{C}^1_+[a,b]$ из некоторой окрестности 0 ряд (12) сходится в пространстве $\mathbf{C}^1[a,b]$.

Т е о р е м а. *Пусть* $q_0\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $z_0\in\varphi(q_0)$, $v_0\in\mathbf{L}^n[a,b]$ *и пусть функция* q_0 *представима равенством* (6). *Далее, пусть отображения* $\Phi:\widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b]\to Q(\boldsymbol{L}^n[a,b])$, $\varphi:\widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b]\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ *удовлетворяют соотношениям* $(9)-(11)$ *и "импульсные воздействия"* $I_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *обладают свойством* $\mathcal{A}$, $k=1,2,...,m$. *Тогда найдется обобщенное решение* x *задачи* (4), (5), *для которого выполняются следующие оценки:*

$$|x(t)-q_0(t)|\leqslant\xi(\omega)(t), \text{при любом } t\in[a,b]; \tag{14}$$

$$|z-z_0|\leqslant\kappa_\varphi\max_{t\in[a,b]}|X(t)|\ \|\xi(\omega)\|_{\mathbf{C}^1[a,b]}, \text{при любом } t\in[a,b]; \tag{15}$$

$$|v(t)-v_0(t)|\leqslant\kappa(t)+\|\kappa_\Phi(t)\|_{\mathbf{L}^1[a,b]}\ \|\xi(\omega)\|_{\mathbf{L}^1[a,b]}, \text{при п.в. } t\in[a,b]. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы аналогично доказательству теоремы о существовании и оценках обобщенных решений импульсных функционально-дифференциальных включений из работы [1].

Данная теорема позволяет найти приближенное обобщенное решение краевой задачи (4), (5) путем подбора функции $q_0\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. При этом функция $\xi(\omega)$, зависящая от функций $q_0, z_0\in\mathbb{R}^n$ и $v_0\in\mathbf{L}^n[a,b]$, дает оценку погрешности приближенного обобщенного решения.

Полученные оценки обобщенных решений краевой задачи (4), (5) для функционально-дифференциальных включений с правой частью, не обладающей свойством выпуклости по переключению значений, и с импульсными воздействиями, зависящими от состояния фазовой траектории, аналогичны оценкам, приведенным в работах [2]–[4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филиппова О.В.* Краевая задача для одного вида импульсных функционально-дифференциальных включений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 2. С. 435–443.

2. *Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В.* Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Части 1-6 // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 6. С. 1275–1313.

3. *Чугунов П.И.* Свойства решений дифференциальных включений и управляемые системы // Прикл. математика и пакеты прикл. программ. Иркутск: Изд-во СЭИСО АН СССР, 1980. С. 155–179.

4. *Булгаков А.И., Полянский А.И.* Обобщенные решения квазилинейных краевых задач для функционально-диффренциальных включений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2007. Т. 12. Вып. 1. С. 52–54.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 14-01-00877, 16-31-50040) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ № НШ-8215.2016.1.

Поступила в редакцию 11 октября 2016 г.

Филиппова Ольга Викторовна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа; Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

UDC 517.911, 517.968
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2062-2067

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH THE IMPULSES INFLUENCES DEPENDING ON CONDITION OF PHASE TRAJECTORY

© O. V. Filippova

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov, Russian Federation, 392000
The Peoples' Friendship University of Russia
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: philippova.olga@rambler.ru

The boundary value problems for one type of impulse functional-differential inclusions which multiple-valued map not necessarily convex-valued with respect to switching in space of summable functions and with the impulses influences depending on a state phase trajectory at the time of puls is considered. Concepts of the generalized solution of such task is entered. Living conditions of the generalized solution of a boundary value problems are found. The way of finding of the approximate generalized solution and function which gives an assessment to an error of the approximate generalized solution is offered.
Key words: impulse functional-differential inclusion; boundary value problems; convex-valued with respect to switching

REFERENCES

1. *Filippova O.V.* Kraevaya zadacha dlya odnogo vida impul'snyh funktsional'no-differentsial'nyh vklyuchenij // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences, 2016. V. 21. Iss. 2. P. 435–443.

2. *Bulgakov A.I., Korchagina E.V., Filippova O.V.* Funktsional'no-differentsial'nye vklyucheniya s impul'snymi vozdejstviyami. CHasti 1-6 // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences, 2009. V. 14. Iss. 6. P. 1275–1313.

3. *CHugunov P.I.* Svojstva reshenij differentsial'nyh vklyuchenij i upravlyaemye sistemy // Prikl. matematika i pakety prikl. programm. Irkutsk: Izd-vo SEISO AN SSSR, 1980. S. 155–179.

4. *Bulgakov A.I., Polyanskij A.I.* Obobshchennye resheniya kvazilinejnyh kraevyh zadach dlya funktsional'no-diffrentsial'nyh vklyuchenij // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences, 2007. V. 12. Iss. 1. P. 52–54.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects №№ 14-01-00877, 16-31-50040) and by the grant of the Russian Federation President for the state support of leading scientific schools № NSh-8215.2016.1.

Received 11 October 2016

Filippova Olga Viktorovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department; Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

Информация для цитирования:

Филиппова О.В. Краевая задача для функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями, зависящими от состояния фазовой траектории // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2062-2067. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2062-2067

Filippova O.V. Kraevaya zadacha dlya funkcional'no-differencial'nogo vklyucheniya s impul'snymi vozdejstviyami, zavisyashchimi ot sostoyaniya fazovoj traektorii [Boundary value problems for functional-differential inclusions with the impulses influences depending on condition of phase trajectory]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 2062-2067. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2062-2067 (In Russian)