УДК 517.988.6, 517.922
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-375-379

О ВОЗМУЩЕНИЯХ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕКТОРНОЗНАЧНОЙ МЕТРИКОЙ

© **Е. С. Жуковский**

Для отображений, действующих в пространствах с векторнозначной метрикой, определены аналоги свойств накрывания и метрической регулярности. Доказана теорема о сохранении свойства накрывания при липшицевых возмущениях. Обсуждаются применения полученных результатов к исследованию функциональных уравнений.
Ключевые слова: липшицевы возмущения накрывающих отображений; пространства с векторнозначной метрикой.

Приведем известное определение (см. [1], [2]) накрывающего отображения.

Для метрического пространства $X=(X,\rho_X)$ обозначаем через $\mathrm{B}_X(x,r)$ замкнутый шар $\{x'\in X:\rho_X(x',x)\leqslant r\}$ с центром в точке $x\in X$ радиуса $r\geqslant 0$.

О п р е д е л е н и е 1. Отображение $\Psi: X\to Y$ называется *накрывающим с коэффициентом* $\alpha>0$ (α*-накрывающим*), если

$$\forall x\in X \quad r\geqslant 0 \quad \mathrm{B}_Y(\Psi(x),\alpha r)\subset \Psi(\mathrm{B}_X(x,r)).$$

Отметим, что отображение $\Psi: X\to Y$ является α*-накрывающим* тогда и только тогда, когда

$$\forall x\in X \quad \forall y'\in Y \quad \exists x'\in X \quad \Psi(x')=y', \quad \rho_X(x',x)\leqslant \alpha^{-1}\rho_Y(y',\Psi(x)). \tag{1}$$

В известной теореме А.А. Милютина о возмущениях [1] утверждается, что если X — полное метрическое пространство, Y — линейное метрическое пространство, отображение $\Psi: X\to Y$ непрерывное и α-накрывающее, а отображение $\Phi: X\to Y$ β-липшицево, $\beta<\alpha$, то их разность $\Psi-\Phi: X\to Y$ является $(\alpha-\beta)$-накрывающим отображением.

В [3] получено утверждение о возмущениях без предположения линейности пространства Y. В случае метрических пространств X,Y, из которых первое пространство полное, рассматривается отображение $\Upsilon: X^2\to Y$, которое при любом $x\in X$ как отображение первого аргумента $\Upsilon(\cdot,x): X\to Y$ замкнуто и α-накрывающее, а как отображение второго аргумента $\Upsilon(x,\cdot): X\to Y$ β-липшицево, $\beta<\alpha$. Показано, что отображение $\Gamma: X\to Y$, $\Gamma(x)=\Upsilon(x,x)$ является $(\alpha-\beta)$-накрывающим. Авторами [3] также получены ослабления перечисленных условий, в частности, вместо предположения накрывания используется определенное в цитируемой работе свойство условного накрывания на заданных множествах. Дальнейшее усиление утверждения о возмущениях и уточнение его условий, вызванное приложениями к неявным дифференциальным, интегральным уравнениям, получено в работах [4]–[5]. В связи с исследованием систем уравнений, в частности, краевых задач и задач управления в [6]–[8] определено свойство накрывания для отображений, действующих в произведениях метрических пространств. В данной работе продолжены эти исследования, предложено понятия накрывания отображений, действующих в пространствах с векторнозначной метрикой.

Пусть E — линейное нормированное пространство, в котором определен замкнутый выпуклый конус $E_+\subset E$ и задано отношение порядка: для $r_1,r_2\in E$ неравенство $r_1\leqslant r_2$, равносильно принадлежности r_2-r_1 конусу E_+. Пусть задано непустое множество $\mathcal{X}$. Отображение $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}: \mathcal{X}^2\to E_+$ называют *векторнозначной метрикой,* если оно обладает свойствами «обычной» метрики, т. е. при любых $x,u,v\in\mathcal{X}$ выполнено:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,u)=0 \;\Leftrightarrow\; x=u; \quad \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,u)=\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(u,x); \quad \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,u)\leqslant \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,v)+\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(v,u).$$

Пару $(\mathcal{X}, \mathcal{P}_\mathcal{X})$ называют пространством с векторнозначной метрикой и обозначают коротко одним символом $\mathcal{X}$. На такое пространстве без изменений переносятся многие понятия метрических пространств.

Замкнутый шар с центром в точке $x \in \mathcal{X}$ *радиуса* $r \in E_+$ в пространстве $\mathcal{X}$ это множество $\mathrm{B}_\mathcal{X}(x,r) \doteq \{x' \in \mathcal{X} : \mathcal{P}_\mathcal{X}(x',x) \leqslant r\}$. Под сходимостью $x_n \to x$ при $n \to \infty$ в $\mathcal{X}$ понимается сходимость $\mathcal{P}_\mathcal{X}(x_n,x) \to 0$ в E. Последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ называют *фундаментальной*, если

$$\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall m > N \quad \|\mathcal{P}_\mathcal{X}(x_n,x_m)\|_E \leqslant \varepsilon.$$

Если любая фундаментальная последовать в $\mathcal{X}$ сходится, то это пространство называется *полным.*

Отметим, что на пространства с векторнозначной метрикой не переносятся понятия расстояния от точки до множества и расстояния по Хаусдорфу между множествами, поскольку ограниченное множество в E_+ может не иметь инфимума (в отличие от линейного порядка в $\mathbb{R}$ упорядоченность в E частичная).

Пусть E, M — некоторые линейные нормированные пространства, в пространстве $\mathcal{L}(M,E)$ линейных ограниченных операторов $F : M \to E$ определим замкнутый выпуклый конус $\mathcal{L}(M,E)_+ \doteq \{F : M \to E \mid F(M_+) \subset E_+\}$ — множество положительных операторов. Обозначим символом $I_M \in \mathcal{L}(M,M)$ — тождественный оператор. Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — пространства с векторнозначными метриками $\mathcal{P}_\mathcal{X} : \mathcal{X}^2 \to E_+$, $\mathcal{P}_\mathcal{Y} : \mathcal{Y}^2 \to M_+$.

О п р е д е л е н и е 2. Отображение $\Psi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ будем называть *накрывающим с операторным коэффициентом* $K \in \mathcal{L}(M,E)_+$ или K *-накрывающим относительно векторнозначных метрик*, если

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad \forall y' \in \mathcal{Y} \quad \exists x' \in \mathcal{X} \quad \Psi(x') = y',\ \mathcal{P}_\mathcal{X}(x',x) \leqslant K\mathcal{P}_\mathcal{Y}(y',\Psi(x)).$$

Свойство накрывания относительно векторнозначных метрик эквивалентно следующему включению

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad \forall r \in E_+ \quad \mathrm{B}_\mathcal{Y}(\Psi(x),r) \subset \Psi(\mathrm{B}_\mathcal{X}(x,Kr)),$$

аналогичному соотношению (1).

Если $E = M = \mathbb{R}$, то векторнозначная метрика совпадает с «обычной». В этом случае определение 2 равносильно определению 1, а для соответствующих коэффициентов выполнено $K = (\alpha^{-1})_{1\times1}$.

О п р е д е л е н и е 3. Отображение $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ будем называть *липшицевым с операторным коэффициентом* $B \in \mathcal{L}(E,M)_+$ или B *-липшицевым относительно векторнозначных метрик*, если

$$\forall x, x' \in \mathcal{X} \quad \mathcal{P}_\mathcal{Y}\big(\Phi(x'),\Phi(x)\big) \leqslant B\,\mathcal{P}_\mathcal{X}(x',x).$$

Если $E = M = \mathbb{R}$, то $B = (\beta)_{1\times1}$ и определение 3 есть определение классического условия Липшица с коэффициентом β.

В пространстве $\mathcal{L}(M,M)$ линейных ограниченных операторов определим порядок, полагая $F_1 \leqslant F_2$ для $F_1, F_2 \in \mathcal{L}(M,M)$ тогда и только тогда, когда $F_2 - F_1 \in \mathcal{L}(M,M)_+$, здесь замкнутый выпуклый конус $\mathcal{L}(M,M)_+ \doteq \{F : M \to M \mid F(M_+) \subset M_+\}$ — множество положительных операторов.

Сформулируем утверждение о возмущениях накрывающего отображения в пространствах с векторнозначной метрикой.

Пусть задано отображение $\Upsilon : \mathcal{X}^2 \to \mathcal{Y}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть пространство* $\mathcal{X}$ *является полным. Пусть существуют такие* $K \in \mathcal{L}(M,E)_+$, $B \in \mathcal{L}(E,M)_+$, *что для любого* $x \in \mathcal{X}$ *отображение* $\Upsilon(\cdot,x) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *является замкнутым и* K *-накрывающим, а отображение* $\Upsilon(x,\cdot) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *—* B *-липшицевым (относительно векторнозначных метрик).*

Тогда, если для спектрального радиуса ϱ *линейного ограниченного положительного оператора* $BK \in \mathcal{L}(M, M)_+$ *имеет место оценка* $\varrho(BK) < 1$, *то отображение* $\Gamma : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $\Gamma(x) = \Upsilon(x, x)$ *является накрывающим с операторным коэффициентом* $K(I_M - BK)^{-1}$.

Если $E = M = \mathbb{R}$, то, как отмечено выше, векторнозначная метрика становится «обычной», $K = (\alpha^{-1})_{1\times 1}$, $B = (\beta)_{1\times 1}$. Тогда из теоремы 1 следует, что «обычный» коэффициент накрывания отображения Γ равен $\left(\alpha^{-1}(1 - \beta\alpha^{-1})^{-1}\right)^{-1} = \alpha - \beta$. Таким образом, в случае метрических пространств теорема 1 аналогична теоремам [3]–[5].

Если $E = \mathbb{R}^n$, $M = \mathbb{R}^m$, то из теоремы 1 следуют результаты [6]–[8] о накрывающих отображениях в произведениях метрических пространств.

Проиллюстрируем возможности теоремы 1 к исследованию уравнений в функциональных пространствах.

Итак, пусть теперь E, M — линейные нормированные пространства действительных функций, определенных на некотором множестве T. Пусть для любого $x \in E$ выполнено $|x| \in E$, где $|x|(t) = |x(t)|$; предполагаем также, что аналогичное свойство выполнено в пространстве M. Определим в этих пространствах конусы E_+, M_+ неотрицательных функций. Векторнозначную метрику $\rho_E : E^2 \to E_+$ определим равенством $\rho_E(x, x')(t) = |x(t) - x'(t)|$. Аналогично зададим векторнозначную метрику ρ_M в пространстве M.

Отображение $\Phi : E \to M$ будет B-липшицевым относительно данных векторнозначных метрик, $B \in \mathcal{L}(E, M)_+$, если

$$\forall x, x' \in E \quad \forall t \in T \quad \left|(\Phi x)(t) - (\Phi x')(t)\right| \leqslant (B|x - u|)(t).$$

Отображение $\Psi : E \to M$ будет обладать свойством K-накрывания относительно данных векторнозначных метрик, если

$$\forall x' \in E \quad \forall y \in M \quad \exists x \in E \quad \forall t \in T \quad \Psi(x) = y, \ |x(t) - x'(t)| \leqslant (K\left|y - \Psi(x')\right|)(t).$$

Пусть $y \in M$ и задано отображение $\Upsilon : E^2 \to M$ такое, что для любого $x \in E$ отображение $\Upsilon(\cdot, x) : E \to M$ является замкнутым и K-накрывающим, а отображение $\Upsilon(x, \cdot) : E \to M$ — B-липшицевым (относительно векторнозначных метрик). Рассмотрим уравнение

$$\big(\Upsilon(x, x)\big)(t) = y(t), \quad t \in T, \tag{2}$$

относительно неизвестной функции $x : T \to \mathbb{R}$ — элемента пространства E.

Из теоремы 1 получаем, что если для спектрального радиуса ϱ линейного ограниченного положительного оператора $BK \in \mathcal{L}(M, M)_+$ имеет место оценка $\varrho(BK) < 1$, то уравнение (2) разрешимо, более того, для любого $u \in E$ существует решение $x \in E$, удовлетворяющее оценке

$$|x(t) - u(t)| \le \left(K(I_M - BK)^{-1}\big|y - \Upsilon(u, u)\big|\right)(t), \quad t \in T.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.* Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35. № 6 (216). С. 11–46.

2. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.

3. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.

4. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. № 3. P. 1026–1044.

5. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.

6. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями. Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 31–56.

7. *Жуковская Т.В., Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Об исследовании систем функциональных уравнений методами теории накрывающих отображений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. № 1. С. 38–42.

8. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439–455.

БЛАГОДАРНОСТИ: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-10021).

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики, e-mail: zukovskys@mail.ru

UDC 517.988.6, 517.922
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-375-379

ON PERTURBATIONS OF COVERING MAPPINGS IN SPACES WITH VECTOR-VALUED METRICS

© **E. S. Zhukovskiy**

For mappings acting in spaces with vector-valued metrics, the analogues of covering and metric regularity are defined. A theorem on stability of covering property under Lipschitz perturbations is proved. The application of the results obtained to investigation of functional equations is discussed.

Key words: Lipschitz perturbations of covering mappings; vector-valued metric.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is supported by the Russian Scientific Fund (project № 15-11-10021).

REFERENCES

1. *Dmitruk A.V., Milyutin A.A., Osmolovskiy N.P.* Teorema Lyusternika i teoriya ehkstremuma // UMN. 1980. T. 35. № 6 (216). S. 11–46.

2. *Arutyunov A.V.* Nakryvayushchie otobrazheniya v metricheskih prostranstvah i nepodvizhnye tochki // Doklady Akademii nauk. 2007. T. 416. № 2. S. 151–155.

3. *Avakov E.R., Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S.* Nakryvayushchie otobrazheniya i ih prilozheniya k differencial'nym uravneniyam, ne razreshennym otnositel'no proizvodnoj // Differencial'nye uravneniya. 2009. T. 45. № 5. S. 613–634.

4. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. № 3. P. 1026–1044.

5. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* O korrektnosti differencial'nyh uravnenij, ne razreshennyh otnositel'no proizvodnoj // Differencial'nye uravneniya. 2011. T. 47. № 11. S. 1523–1537.

6. *Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A.* Ob upravlenii ob"ektami, dvizhenie kotoryh opisyvaetsya neyavnymi nelinejnymi differencial'nymi uravneniyami. Avtomatika i telemekhanika. 2015. № 1. S. 31–56.

7. *Zhukovskaya T.V., Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A.* Ob issledovanii sistem funkcional'nyh uravnenij metodami teorii nakryvayushchih otobrazhenij // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2013. T. 18. № 1. S. 38–42.

8. *Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A.* Nakryvayushchie otobrazheniya v proizvedenii metricheskih prostranstv i kraevye zadachi dlya differencial'nyh uravnenij, ne razreshennyh otnositel'no proizvodnoj // Differencial'nye uravneniya. 2013. T. 49. № 4. S. 439–455.

Received 21 March 2016.

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics, e-mail: zukovskys@mail.ru