A problem of a certain type convex functional minimization under linear constraints in a space of Lebesgue integrable functions is considered. Necessary and sufficient optimality conditions for this problem are obtained. As an application, the principle of maximum entropy is derived from the main result.

Key words: convex programming; necessary minimum conditions; principle of maximum entropy.

Жуковский Сергей Евгеньевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Zhukovskiy Sergey Evgenyevich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru.

Петров Данил Вадимович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, студент, e-mail: ddbihbka@gmail.com

Petrov Danil Vadimovich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Student, e-mail: ddbihbka@gmail.com

УДК 517+512

О ВЫПУКЛОСТИ ОБРАЗОВ КВАДРАТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© **С.Е. Жуковский, Р. Сенгупта**

Ключевые слова: квадратичное отображение; выпуклый конус.

В работе обсуждается вопрос о выпуклости образа выпуклого замкнутого конуса при квадратичном отображении. Получены условия, при которых сужение квадратичного отображения на выпуклый замкнутый конус сюръективно.

В настоящей работе исследуются квадратичные отображения конечномерных пространств. Напомним, что отображение $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ называется квадратичным, если существуют симметрические матрицы $Q_1, ..., Q_k$ размерности $n \times n$ такие, что

$$Q(x) = \begin{pmatrix} \langle Q_1 x, x\rangle \\ \vdots \\ \langle Q_k x, x\rangle \end{pmatrix} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Некоторые результаты о свойствах квадратичных отображений приведены в [1, 2].

Наряду с квадратичным отображением Q мы будем рассматривать билинейное симметричное отображение

$$(x,u) \mapsto \begin{pmatrix} \langle Q_1 x, u\rangle \\ \vdots \\ \langle Q_k x, u\rangle \end{pmatrix} \quad \forall\, (x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

значения которого будем обозначать через $Q[x,u]$. Будем говорить, что множество $K \subset \subset \mathbb{R}^n$ называется конусом, если $tK = K$ для любого положительного t. Обозначим через $Q(K)$ образ произвольного множества K при отображении отображения Q. Достаточно очевидно, что если множество K является конусом, то и $Q(K)$ является конусом.

В этой заметке обсуждается вопрос о выпуклости образов выпуклых конусов при квадратичном отображении. Рассмотрим сначала случай $K = \mathbb{R}^n$. Достаточно очевидно, что множество $Q(\mathbb{R}^n)$ не обязательно выпукло. Действительно, пусть

$$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 2x_1x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \quad \forall\, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $y, v \in Q(\mathbb{R}^2)$, но $\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}v \notin Q(\mathbb{R}^2)$, и, значит, $Q(\mathbb{R}^2)$ не выпукло.

В работе [2] Л.Л. Дайнсом было доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Для любого квадратичного отображения* $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ *множество* $Q(\mathbb{R}^n)$ *выпукло.*

Приведенный выше пример показывает, что предположение $k = 2$ здесь существенно и не может быть ослаблено. Из теоремы Дайнса, в частности, вытекает следующий критерий несюръективности. *Квадратичное отображение* $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ *не сюръективно тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор* $\lambda \in \mathbb{R}^2$ *такой, что квадратичная форма* $x \mapsto \langle \lambda, Q(x) \rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$ *неотрицательно определена.* В [2] это утверждение приводится, однако в нем пропущено условие нетривиальности $\lambda \neq 0$.

Пусть теперь $K \subseteq \mathbb{R}^n$ – непустой выпуклый замкнутый конус. Приведем условия, при которых множество $Q(K)$ не просто выпукло, но $Q(K) = \mathbb{R}^k$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *– квадратичное отображение,* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *– непустой выпуклый замкнутый конус. Предположим, что существует вектор* $h \in K$ *такой, что*

$$Q[h, K] = \mathbb{R}^k. \tag{1}$$

Тогда $Q(K) = \mathbb{R}^k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим отображение $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ по формуле

$$F(x, \sigma) = Q(x) - \sigma \quad \forall\, (x, \sigma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k,$$

положим $x_* = h$, $\sigma_* = 0$. Применим к отображению F теорему о неявной функции из [3] в точках x_*, σ_*. Достаточная гладкость отображения F очевидна. Кроме того, из предположения (1) следует, что

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma_*)(K + \mathrm{span}\{x_*\}) = \frac{\partial Q}{\partial x}(h)(K + \mathrm{span}\{h\}) = Q[h, K + \mathrm{span}\{h\}] = Q[h, K] = \mathbb{R}^k$$

(здесь $\mathrm{span}\{h\} = \{th : t \in \mathbb{R}\}$). Значит для отображения F условие Робинсона выполняется в точках x_*, σ_*. Согласно теореме о неявной функции из [3] существует окрестность $O \subset \mathbb{R}^k$ точки σ_* и функция $\chi : O \to K$ такая, что $F(\chi(\sigma), \sigma) = 0$ для любого $\sigma \in O$. Последнее равносильно тому, что для любого $\sigma \in O$ существует $x \in K$ такой, что $Q(x) = \sigma$. Следовательно, $O \subset Q(K)$, а так как K – конус, то для любого положительного t выполняется

$$tO \subset tQ(K) = Q(\sqrt{t}K) = Q(K).$$

Из последнего включения следует, что $Q(K) = \mathbb{R}^k$. □

Покажем далее, что если условие (1) нарушается, то множество $Q(K)$ может не только не совпадать с $\mathbb{R}^k$, но и не быть выпуклым.

П р и м е р 1. Положим

$$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix} \quad \forall\, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$K = \{x = (x_1, x_2) : x_2 \geqslant |x_1|\},$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что множество K выпукло и замкнуто,

$$x \in K, \quad y = Q(x), \quad u \in K, \quad v = Q(u),$$

Следовательно, $y, v \in Q(K)$. Однако,

$$\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}v \notin Q(\mathbb{R}^n),$$

поскольку уравнение

$$Q(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

не имеет решений $x \in K$. Итак, множество $Q(K)$ не выпукло. В этом примере предположение (1) нарушается:

$$Q[h, K] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} K = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \neq \mathbb{R}^2.$$

При построении этого примера существенно использовалось то, что у отображения Q существует нетривиальный нуль, т.е. такой вектор $h \neq 0$, что $Q(h) = 0$. Однако, даже если у отображения Q нет нетривиальных нулей, множество $Q(K)$ может не быть выпуклым. Приведем соответствующий пример.

П р и м е р 2. Положим

$$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix} \quad \forall\, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Для произвольного ветора $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ обозначим через $\rho(x) \in (0, \infty)$ и $\varphi(x) \in [0, 2\pi)$ его полярные координаты. Положим

$$K = \{0\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x) \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \right\}$$

Несложно проверить, что $Q(K)$ – выпуклый замкнутый конус, и

$$Q(K) = \{0\} \cup \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \varphi(y) \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \right\}.$$

Значит, $Q(K)$ не выпукло.

Приведенные примеры показывают также, что в теореме Дайнса нельзя заменить $Q(\mathbb{R}^n)$ на $Q(K)$ для произвольного непустого выпуклого замкнутого конуса K.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнов А.В.* Гладкие анормальные задачи теории экстремума и анализа // УМН. 2012. Т. 57. № 3 (405). С. 3–62.

2. *Dines L.L.* On the mapping of quadratic forms // Bull. of the AMS. 1941. V. 47. № 6. P. 494–498.

3. *Арутюнов А.В.* К теоремам о неявной функции в анормальных точках // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 30–39.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена в рамках реализации государственного задания министерства образования и науки РФ в сфере научной деятельности (код проекта 1.333.2014/K), при поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект № МК-5333.2015.1.) и гранта РФФИ (проект № 14-01-31185).

Поступила в редакцию 1 июня 2015 г.

Zhukovskiy S.E., Sengupta R. ON THE CONVEXITY OF QUADRATIC MAPPINGS IMAGES

In the paper, the question on convexity of quadratic mappings images is discussed. The conditions for a restriction of a quadratic mapping to a closed convex cone to be surjective are obtained.

Key words: quadratic mapping; convex cone.

Жуковский Сергей Евгеньевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Zhukovskiy Sergey Evgenyevich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Сенгупта Ричик, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, студент, e-mail: veryricheek@hotmail.com

Sengupta Richik, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Student, e-mail: veryricheek@hotmail.com

УДК 517.962.24 + 517.929.9

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

© **И.А. Забродский, А.С. Кузякина**

Ключевые слова: разностное уравнение неявного вида; устойчивость положения равновесия; экспоненциальная устойчивость; накрывающие отображения метрических пространств.

Рассмотрено разностное уравнение неявного вида в произвольном метрическом пространстве. Предложено понятие частичной экспоненциальной устойчивости. Получены условия такой устойчивости. Исследование основано на результатах о накрывающих отображениях, действующих в метрических пространствах.

Разностными уравнениями моделируются многие процессы в биологии, экономике, технике. Разностные уравнения используются в приближенных методах решения интегральных, дифференциальных, функциональных уравнений. Одна из основных задач исследования разностных уравнений состоит в определении устойчивости положения равновесия. Эта задача подробно изучена для автономных разностных уравнений явного вида

$$x_{n+1} = F(x_n),$$

где $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (см., например, [1]).