УДК 517.988.5

УСЛОВИЯ НАКРЫВАНИЯ ОПЕРАТОРА НЕМЫЦКОГО В ПРОСТРАНСТВЕ СУЩЕСТВЕННО ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

© **М.Ж. Алвеш, Е.А. Плужникова, В.С. Трещев**

Ключевые слова: накрывающие отображения метрических пространств; оператор Немыцкого в пространстве существенно ограниченных функций.

Рассматривается оператор суперпозиции (оператор Немыцкого), действующий в пространстве существенно ограниченных функций. Предполагается, что порождающая этот оператор удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $g(t,x)$ по второму аргументу является α-накрывающей на некоторой совокупности $\mathfrak{A}(t) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ (центров и радиусов «накрывающих шаров»). Исходя из α и $\mathfrak{A}(t)$, для оператора Немыцкого получена константа накрывания и определена совокупность центров и радиусов шаров в пространстве существенно ограниченных функций.

Необходимость получения условий накрывания оператора Немыцкого вызвана приложениями утверждений о накрывающих отображениях метрических пространств к исследованию неявных функциональных, дифференциальных, интегральных уравнений.

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$; $\mathbb{R}^n$ — вещественное n-мерное пространство с нормой $|\cdot|$; $\mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$ — совокупность всех непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$; $L_p([a,b],\mathbb{R}^n)$ — пространство суммируемых в p-ой степени, если $1 \leqslant p < \infty$, и существенно ограниченных при $p = \infty$ функций с метрикой

$$\rho_{L_p}(y_1,y_2) = \left(\int\limits_a^b |y_1(s)-y_2(s)|^p ds\right)^{1/p}, \ \ p \neq \infty; \quad \rho_{L_\infty}(y_1,y_2) = \operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[a,b]} |y_1(s)-y_2(s)|. \quad (1)$$

В работах [1–3] доказан признак условного накрывания оператора Немыцкого, определенного на подпространстве $L_\infty([a,b],\Omega) \subset L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ функций со значениями в заданном множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и действующего в $L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$. В работах [4–6] эти результаты распространены на оператор Немыцкого $L_{p_1}([a,b],\Omega(\cdot)) \to L_{p_2}([a,b],\Theta(\cdot))$. Элементами данных пространств являются такие измеримые сечения x, y заданных измеримых многозначных отображений $\Omega : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, $\Theta : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$, что для фиксированных измеримых сечений этих отображений $u_0(t) \in \Omega(t)$, $w_0(t) \in \Theta(t)$ выполнено $x - u_0 \in L_{p_1}([a,b],\mathbb{R}^n)$, $y - w_0 \in L_{p_2}([a,b],\mathbb{R}^m)$, а метрика определена равенствами (1).

Наряду с понятиями накрывания и условного накрывания в литературе используются различные их обобщения. В работах [7, 8] и др. предложено понятие локально накрывающего отображения и исследованы свойства таких отображений. Сравнительный обзор различных подходов к определению понятия накрывания приведен в [9, 10]. Одним их наиболее общих является предложенное в [2] определение накрывания на заданной совокупности центров и радиусов «накрывающих шаров». Получению признака накрывания оператора Немыцкого именно при таком общем определении этого понятия посвящена настоящая заметка.

Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) – метрические пространства. Для $u \in X$, $r \in \mathbb{R}_+$ определим шар

$$B_X(u,r) = \{x \in X : \rho_X(x,u) \leqslant r\}.$$

Пусть заданы множества $W \subseteq Y$, $\mathfrak{A} \subseteq X \times \mathbb{R}_+$ и число $\alpha > 0$.

О п р е д е л е н и е 1 [2]. Отображение $F : X \to Y$ называется *α-накрывающим множество W на совокупности* $\mathfrak{A}$, если для любых $(u,r) \in \mathfrak{A}$ имеет место включение

$$B_Y(F(u), \alpha r) \bigcap W \subseteq F\big(B_X(u,r)\big).$$

Пусть определена удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $g : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \to \mathbb{R}^m$. Пусть при любом $r > 0$ существует такая функция $\eta_r \in L_\infty([a,b],\mathbb{R})$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0,r)$ выполнено неравенство $|g(t,x)| \leqslant \eta_r(t)$. Определим оператор Немыцкого

$$(N_g y)(t) \doteq g(t, y(t)). \tag{2}$$

Принятые предположения являются необходимыми и достаточными условиями действия оператора N_g из $L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ в $L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ (см. [11, с. 375]).

Далее, пусть заданы измеримые отображения $W : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^m)$, $\mathfrak{A} : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$. Будем предполагать, что при п.в. $t \in [a,b]$ функция $g(t,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является α-накрывающей множество $W(t)$ на совокупности $\mathfrak{A}(t)$. Нашей целью является определить накрывающие свойства оператора (2), то есть определить, с какой константой, какое множество и на какой совокупности оператор $N_g : L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ будет накрывающим.

Для произвольного $r \geqslant 0$ определим многозначное отображение

$$t \in [a,b] \rightrightarrows \mathfrak{A}_r(t) \doteq \mathfrak{A}(t) \cap (\mathbb{R}^n \times \{r\}). \tag{3}$$

Являясь пересечением замкнутозначных измеримых отображений, заданное соотношением (3) отображение $\mathfrak{A}_r : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ измеримо (см. [12, с. 71]). Определим отображение $\Pi_{\mathbb{R}^n} : \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \times \{r\}) \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$ равенством $\Pi_{\mathbb{R}^n}\{(x,r)\} = \{x\}$. Имеем $\mathfrak{A}_r(t) = \Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r(t) \times \{r\}$, и поэтому отображение

$$\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n), \quad \Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r(t) = \{x : (x,r) \in \mathfrak{A}(t)\},$$

измеримо. Определим следующее множество сечений этого отображения

$$\mathrm{S}_{L_\infty}[\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r] = \{u \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) : u(t) \in \Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r(t) \text{ при п.в. } t \in [a,b]\}.$$

При любом $r \geqslant 0$ эффективное множество $\mathrm{dom}(\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r) \doteq \{t \in [a,b] : \Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r(t) \neq \varnothing\}$ измеримо; определим множество $\mathfrak{R}$ таких $r \geqslant 0$, для которых мера множества $\mathrm{dom}(\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r)$ максимальна, т. е. равна $b - a$. Теперь определим совокупность

$$\mathfrak{B} = \big\{(u,r) \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}_+ : \ r \in \mathfrak{R}, \ u \in \mathrm{S}_{L_\infty}[\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r]\big\}.$$

Для формулировки основного результата нам потребуется еще следующее множество измеримых сечений отображения $W : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^m)$:

$$\mathrm{S}_{L_\infty}[W] = \{y \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m) : y(t) \in W(t) \text{ при п.в. } t \in [a,b]\}.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть при п.в. $t \in [a,b]$ отображение $g(t,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является α-накрывающим множество $W(t)$ на совокупности $\mathfrak{A}(t)$. Тогда определенный равенством (2) оператор Немыцкого $N_g : L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ будет α-накрывающим множество $\mathrm{S}_{L_\infty}[W]$ на совокупности $\mathfrak{B}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(u,r) \in \mathfrak{B}$, тогда $\big(u(t), r\big) \in \mathfrak{A}(t)$ при п.в. $t \in [a,b]$. Выберем произвольный элемент $y \in B_{L_\infty}\big(N_g(u), \alpha r\big) \cap \mathrm{S}_{L_\infty}[W]$. Имеем $\big|y(t) - g\big(t, u(t)\big)\big| \leqslant \alpha r$ и $y(t) \in W(t)$ при п.в. $t \in [a,b]$. Таким образом, $y(t) \in B_{\mathbb{R}^m}\big(g\big(t,u(t)\big), \alpha r\big) \cap W(t)$. В силу предположения накрывания функцией $g(t,\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ множества $W(t)$ на совокупности $\mathfrak{A}(t)$ справедливо включение

$$y(t)\in g\big(t,B_{\mathbb{R}^n}(u(t),r)\big).$$

Заметим, что многозначное отображение $t\in[a,b]\mapsto B_{\mathbb{R}^n}(u(t),r)\in \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$ измеримо. Поэтому согласно теореме Филиппова [13, с. 179], существует такая измеримая функция $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, что $x(t)\in B_{\mathbb{R}^n}(u(t),r)$ и $y(t)=g\big(t,x(t)\big)$. Это означает, что $x\in B_{L_\infty}(u,r)$, $y=N_g(x)$.

Таким образом, установлена справедливость вложения

$$B_{L_\infty}(N_g(u),\alpha r)\cap \mathrm{S}_{L_\infty}[W]\subset N_g\big(B_{L_\infty}(u,r)\big).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.

2. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.

3. *Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S, Zhukovskii S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. P. 1026–1044.

4. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Накрывающие отображения в проблеме корректности краевых задач для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. № 4. С. 1082-1085.

5. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439–455.

6. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 31–56.

7. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points / / J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5. № 1. С. 105-127.

8. *Mordukhovich B.S.* Variational Analysis and Generalized Differentiation. Springer, 2005. V. 1.

9. *Жуковский С.Е.* Сравнение различных определений накрывающих отображений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2014. Т. 19. № 2. С. 376–379.

10. *Zhukovskiy S.* On Covering Properties in Variational Analysis and Optimization // Set-Valued and Variational Analysis, 2015. DOI: 10.1007/s11228-014-0314-3

11. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я.* Интегральные уравнения. СМБ. М.: Наука, 1968. 448 с.

12. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: Физматлит, 2007. 224 с.

13. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977. 624 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00877).

Поступила в редакцию 2 июня 2015 г.

Alves M.G., Pluzhnikova E.A., Treshchev V.S. THE CONDITIONS OF THE COVERING PROPERTY FOR THE NEMYTSKIY OPERATOR IN LEBEGUES SPACES

We consider the superposition operator (the Nemytskiy operator) acting in the spaces of integrable functions. It is assumed that a function $f(t,x)$ generating this operator satisfies the Caratheodory conditions and is α-covering with respect to the second argument on the family of centers and radii «of the covering balls» $\mathfrak{A}(t)\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+$. Knowing α and $\mathfrak{A}(t)$, for the Nemytskiy operator, we get the constant of covering and find a family of centers and radii of the balls in the space of integrable functions.

Key words: covering mappings of metric spaces; the Nemytskiy operator in spaces of integrable functions.

Алвеш Мануэль Жуаким, Университет Эдуардо Мондлане, г. Мапуту, Мозамбик, доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: mjalves@tvcabo.co.mz

Alves Manuel Juaquim, Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, e-mail: mjalves@tvcabo.co.mz

Плужникова Елена Александровна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии, e-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Pluzhnikova Elena Aleksandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Algebra and Geometry Department, e-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Трещёв Валентин Сергеевич, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант кафедры алгебры и геометрии, e-mail: treshchev.math@mail.ru

Treshchev Valentin Sergeyevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Algebra and Geometry Department, e-mail: treshchev.math@mail.ru

УДК 517.977

ВЫРОЖДЕННАЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© И.Ю. Андреева, А.Н. Сесекин

Ключевые слова: вырожденная линейно-квадратичная задача; линейное запаздывание.
Рассматривается вырожденная линейно-квадратичная задача оптимизации на траекториях линейной неавтономной системы дифференциальных уравнений с линейным запаздыванием. При определенных предположениях решение данной задачи существует в классе импульсных управлений. Построено оптимальное программное управление, решающее эту задачу, которое содержит импульсные составляющие в начальный и конечный моменты времени, внутри промежутка управления управление является гладкой функцией.

Введение. Рассматриваемая задача принадлежит к классу вырожденных линейно-квадратичных задач оптимизации. Такие задачи имеют важное прикладное значение [1]. Для вырожденных линейно-квадратичных задач характерно то, что в классе измеримых управлений такие задачи решения не имеют [2-4]. В такой ситуации для обеспечения существования оптимального управления приходится расширять множество допустимых управлений, допуская импульсные управления. В работе рассматривается вырожденная линейно-квадратичная задача для системы с линейным запаздыванием. Такие системы встречаются при описании движения токоприемника у транспортных средств с электрической тягой, в биологии, вейвлет-теории и др. Аналогичная задача для случая постоянной матрицы B рассматривалась в [5]. Помимо того, что в настоящей работе рассматривается случай переменной матрицы B, результаты получены не сведением исходной задачи с переменным