5. *Малыгина В.В.* Некоторые признаки устойчивости функционально-дифференциальных уравнений, разрешённых относительно производной // Изв. вузов. Математика. 1992. № 7. С. 46-53.
6. *Yoneyama T.* The 3/2 stability theorem for one-dimensional delay-differential equations with unbounded delay // J. Math. Anal. and Appl. 1992. № 165. P. 133-143.
7. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
8. *Малыгина В.В.* Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с последействием // Изв. вузов. Математика. 1993. № 5. С. 72-85.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (задание №2014/152, проект №1890) и при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 13-01-96050 р_урал_а).

Поступила в редакцию 1 июня 2015 г.

Malygina V.V. ON THE ROBUST STABILITY OF NONAUTONOMOUS FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Effective conditions of robust stability are obtained for a linear nonautonomous differential equation with several delays. As an example, the equation with two delays is considered, whose domain of robust stability is constructed in the parameter space of the problem.

Key words: functional-differential equation; robust stability; effective conditions.

Малыгина Вера Владимировна, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Россия, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник научно-исследовательского центра «Функционально-дифференциальные уравнения», e-mail: mavera@list.ru

Malygina Vera Vladimirovna, Perm State National Research University, Perm, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher of the Research Center «Functional-Differential Equations», e-mail: mavera@list.ru

УДК 517.977

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ТРУБОК ТРАЕКТОРИЙ УПРАВЛЯЕМЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ С КОНИЧЕСКИМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА УПРАВЛЕНИЕ

© **О.Г. Матвийчук**

Ключевые слова: множества достижимости; импульсное управление; эллипсоидальное исчисление.

В работе рассматриваются задача оценивания множеств достижимости управляемых динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с импульсным управлением и неполной информацией о начальных данных. Предполагается, что импульсные управления в динамической системе находятся в пересечении специального конуса и обобщенного эллипсоида в пространстве функций ограниченной вариации. Целью данной работы является исследование свойств множеств достижимости управляемой системы заданного вида и построение алгоритма внутреннего эллипсоидального оценивания траекторий динамических систем импульсного типа.

Рассматривается задача импульсного управления трубкой траекторий линейной дифференциальной системы

$$dx = A(t)xdt + du(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [t_0, T] \tag{1}$$

с неизвестным, но ограниченным начальным состоянием $x(t_0 - 0) = x_0 \in X_0 = E(r, R)$, где $E(r,R) = \big\{x \in \mathbb{R}^n | \ (x-r)'R^{-1}(x-r) \leqslant 1\big\}$ — эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ с центром $r \in \mathbb{R}^n$ и симметричной положительно определенной матрицей R. Здесь $A(t)$ — непрерывная матричная функция размерности $n \times n$, $u(\cdot) \in \mathbb{V}_p^n$ — импульсное управление, где $\mathbb{V}_p^n$ обозначает пространство n-векторных функций ограниченной вариации на $[t_0, T]$ [1–2]. В отличие от известных постановок, на управляющие импульсные воздействия $u(t)$, помимо обычного требования ограниченности вариации, наложено специальное ограничение $u(t) \in \in \mathcal{U} = E^* \cap K^*$, где E^* — обобщенный «эллипсоид» в пространстве $\mathbb{V}_p^n$:

$$E^* = \Big\{u(\cdot) \in \mathbb{V}_p^n | \int\limits_{t_0}^{T} y(t)'du(t) \leqslant 1, \quad \forall y(\cdot) \in \mathbb{C}_q^n, \quad y(t) \in E_0 = E(0, Q_0^{-1}), \quad \forall t {\in} [t_0, T]\Big\}$$

и K^* — обобщенный конус в пространстве $\mathbb{V}_p^n$:

$$K^* = \Big\{u(\cdot) \in \mathbb{V}_p^n \ | \ \int\limits_{t_0}^{T} y(t)'du(t) \geqslant 0, \quad \forall y(\cdot) \in \mathbb{C}_q^n, \quad y(\cdot) \in K_0, \quad \forall t {\in} [t_0, T]\Big\},$$

$$K_0 = \big\{u \in \mathbb{R}^n \ | \ u = (u_1, \ldots, u_n), \quad u_1 \geqslant 0, \quad u_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n\big\}.$$

Здесь матрица Q_0 является симметричной положительно определенной матрицей, $\mathbb{C}_q^n$ обозначает пространство непрерывных n-векторных функций на $[t_0, T]$ с нормой $\|y(\cdot)\|_{\infty,q} = = \max\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant T} \|y(t)\|_q$ $\big(1 \leqslant q \leqslant \infty, \ q = (1 - p^{-1})^{-1}\big)$.

При ограничении $u(t) \in \mathcal{U} = E^* \cap K^*$ векторы скачков обобщенных управлений $\Delta u = u(t_{i+1}) - u(t_i)$ обязаны лежать в пересечении $E(0, Q_0) \cap K_0$, т. е.

$$\Delta u \in E(0, Q_0) \cap K_0 = \big\{z \in \mathbb{R}^n | \ z'Q_0^{-1}z \leqslant 1, \ z = (z_1, \ldots, z_n), \ z_1 \geqslant 0, \ z_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \ldots, n\big\}.$$

Предполагается, что заданы фазовые ограничения в моменты t_j

$$x(t_j) \in E(y_j, D_j), \quad t_j : \ t_0 < t_1 < \cdots < t_k = T, \quad j = 0, \ldots, k, \tag{2}$$

где $E(y_j, D_j)$ — заданные эллипсоиды с симметричными положительно определенными матрицами D_j и центрами $y_j \in \mathbb{R}^n$.

Предполагается, что для рассматриваемой системы существует по крайней мере одна траектория $x(t) = x(t; u(\cdot), x_0)$, удовлетворяющая условиям $x_0 \in X_0$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и фазовым ограничениям.

Трубку всех возможных траекторий системы (1) из начального состояния $\{t_0, X_0\}$ при ограничениях $x_0 \in X_0$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и фазовых ограничениях (2) далее будем обозначать символом

$$\mathcal{X}(\cdot) = \mathcal{X}(\cdot; \mathcal{U}, X_0) = \bigcup \ \Big\{x\big(\cdot; u(\cdot), x_0\big) \mid x_0 \in X_0, \ u(\cdot) \in \mathcal{U}\Big\}.$$

Отметим, что сечение трубки траекторий $\mathcal{X}(\cdot)$ в момент времени T совпадает с множеством достижимости $\mathcal{X}(T; \mathcal{U}, X_0)$ системы (1) в момент T, построенного из начального состояния $\{t_0, X_0\}$.

Целью данной работы является исследование свойств множеств достижимости управляемой системы (1) при заданных ограничениях и построение алгоритма внутреннего эллипсоидального оценивания ее множеств достижимости.

Т е о р е м а 1. [3] *Справедливо следующее равенство*

$$\mathcal{X}(T;\mathcal{U},E(r,R)) = E(r^*,R^*) + \mathcal{X}(T;\mathcal{U},\{0\}), \quad r^* = \Phi(T,t_0)r, \quad R^* = \Phi(T,t_0)R(\Phi(T,t_0))',$$

$\Phi(t)$ — *фундаментальная матрица уравнения* $\dot{z} = A(t)z$ ($\Phi(0) = I$), $\Phi(t,\,\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$.

Согласно Теореме 1 эллипсоидальная оценка множества достижимости $\mathcal{X}(T;\mathcal{U},X_0)$ может быть найдена с помощью формул эллипсоидального оценивания суммы двух эллипсоидов $E(r^*,R^*)$ и эллипсоида, оценивающего множество достижимости $\mathcal{X}\big(T;\mathcal{U},\{0\}\big)$. Поэтому далее полагаем, что $X_0 = \{0\}$.

Опишем кратко полученный алгоритм внутреннего эллипсоидального оценивания.

А л г о р и т м. Рассмотрим разбиение $\{[t_{j-1},\,t_j]\}$: $t_0<t_1<\ldots<t_{j-1}<t_j<\cdots<t_k=T$ заданного отрезка $[t_0,T]$, $x(t_j)\in E(y_j,\,D_j)$ (2), $j=0,\ldots,k$.

1. Находим эллипсоид $E(a,\,Q)\subseteq E(0,\,Q_0)\cap K_0$ в соответствии с Теоремой 2.

Т е о р е м а 2. [4] *Справедлива следующая эллипсоидальная оценка*

$$E(a,\,Q)\subseteq E(0,\,Q_0)\cap K_0, \quad a = \frac{n}{n+1}\cdot Q_0\nu(\nu' Q_0'\nu)^{-\frac{1}{2}},$$
$$Q^{-1} = (n+1)\cdot(\nu\nu')\cdot(\nu' Q_0'\nu)^{-1} + \frac{n+1}{n}\cdot Q_0^{-1},$$

где ν — *единичный вектор внутренней нормали к* K_0 ($\|\nu\|=1$). *Эллипсоид* $E(a,\,Q)$ *имеет наибольший объем среди всех эллипсоидов, содержащихся в* $E(0,\,Q_0)\cap K_0$.

2. Рассматриваем систему (1) с начальным условием $X_0=\{0\}$ и новым ограничением на управление $u(\cdot)\in\widetilde{\mathcal{U}}=\widetilde{E}^*$, где множество $\widetilde{E}^*$ порождено эллипсоидом $E(a,\,Q)$

$$\widetilde{E}^* = \{u(\cdot)\in\mathbb{V}_p^n \mid \int\limits_{t_0}^{T} y(t)'du(t)\leqslant 1 \ \ \forall y(\cdot)\in\mathbb{C}_q^n \ \ y(t)\in E(a,\,Q) \ \ \forall t\in[t_0,\,t_1]\}.$$

Л е м м а 1. *Справедливо следующее включение* $\mathcal{X}(t;\widetilde{\mathcal{U}},\,\{0\})\subseteq\mathcal{X}(t;\mathcal{U},\,\{0\})$.

3. Строим внутреннюю эллипсоидальную оценку множества достижимости $\mathcal{X}(t;\widetilde{\mathcal{U}},\,\{0\})$.

Здесь, в отличие от задач оценивания состояний динамических систем с управлениями классического типа, возникает задача внутреннего эллипсоидального оценивания выпуклой оболочки объединения семейства эллипсоидов [3–5].

Т е о р е м а 3. [3] *Для системы (1) для любого* $\varepsilon>0$ *существуют* $\delta>0$ *и конечное множество* $T_\delta=\{\tau_1,\,\tau_2,\,\ldots,\,\tau_m\}\subset[t_0,\,t_1]$ *такие, что*

$$\overline{\text{co}}\Big(\bigcup_{\tau_i\in T_\delta} E(a_{\tau_i},\,Q_{\tau_i})\Big)\subseteq\mathcal{X}(t;\widetilde{\mathcal{U}},\,\{0\})\subseteq\overline{\text{co}}\Big(\bigcup_{\tau_i\in T_\delta} E(a_{\tau_i},\,Q_{\tau_i})\Big)+B(0,\,\varepsilon),$$
$$a_{\tau_i} = \Phi(T,\,\tau_i)a + E(r^*,R^*), \quad Q_{\tau_i} = \Phi(T,\,\tau_i)Q(\Phi(T,\,\tau_i))'.$$

Здесь $B(0,\,\varepsilon)$ — ε*-шар в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *с центром в начале координат.*

Известно, что операции пересечения и объединения для пересекающихся выпуклых множеств являются двойственными операциями в том смысле, что одна из них превращается в другую при переходе от исходных множеств к их полярам [6]. Поэтому перейдем от $E(a_{\tau_i},\,Q_{\tau_i})$ к полярам $E^*(a_{\tau_i},\,Q_{\tau_i})$ и построим эллипсоидальную оценку для

$\bigcap\limits_{\tau_i \in T_\delta} E^*(a_{\tau_i}, Q_{\tau_i}) \subseteq \tilde{E}^+(\tilde{a}, \tilde{Q})$. Здесь используются известные результаты эллипсоидального исчисления полученные академиками А.Б. Куржанским [7] и Ф.Л. Черноусько [8] и их учениками.

Т е о р е м а 4. *Справедлива следующая эллипсоидальная оценка*

$$\tilde{E}^-(\tilde{a}^-, \tilde{Q}^-) = \left(\tilde{E}^+(\tilde{a}, \tilde{Q})\right)^* \subseteq \mathcal{X}(t; \widetilde{\mathcal{U}}, \{0\}) \subseteq \mathcal{X}(t; \mathcal{U}, \{0\}).$$

4. Находим $E_1^-(a_1^-, Q_1^-) \subseteq E(y_1, D_1) \bigcap \tilde{E}^-(\tilde{a}^-, \tilde{Q}^-)$, используя стандартную процедуру внутреннего эллипсоидального оценивания пересечения эллипсоидов [3], [4].

5. Повторяем шаги 2–4 для временных интервалов $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 2, \ldots, k$, где $\widetilde{\mathcal{U}}$ порождено эллипсоидом $E_j^-(a_j^-, Q_j^-)$, полученным на шаге 4.

В результате применения алгоритма получаем внутреннюю эллипсоидальную оценку трубки траекторий $\mathcal{X}(t; \widetilde{\mathcal{U}}, X_0)$, а, следовательно, и $\mathcal{X}(t; \mathcal{U}, X_0)$.

Разработанный алгоритм оценивания проиллюстрирован модельными примерами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
3. *Вздорнова О.Г., Филиппова Т.Ф.* Внешние эллипсоидальные оценки множеств достижимости дифференциальных импульсных систем // Известия РАН: Теория и системы управления. 2006. № 1. С. 38-47.
4. *Matviychuk O.G.*, Internal Ellipsoidal Estimates of Reachable Set of Impulsive Control Systems under Ellipsoidal State Bounds and with Cone Constraint on the Control // Lecture Notes in Computer Science. 2014. № 8353, P. 125–133.
5. *Matviychuk O.G.*, Estimation Problem for Impulsive Control Systems under Ellipsoidal State Bounds and with Cone Constraint on the Control, // AIP Conf. Proc. 2012. № 1497. P. 3–12.
6. *Vazhentsev A.Y.*, External Ellipsoidal Estimation of the Union of Two Concentric Ellipsoids an Its Application // Computation Mathematics and Modelling. 2004. V. 15. № 2. P. 110–122.
7. *Kurzhanski A.B., Valyi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. Laxenburg: IIASA Birkhauser, 1997.
8. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем: метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №15-01-02368а) и Программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект № 15-16-1-8).

Поступила в редакцию 5 мая 2015 г.

Matviychuk O.G. THE ELLIPSOIDAL ESTIMATION OF TRAJECTORY TUBES OF IMPULSIVE CONTROL SYSTEMS WITH THE CONE CONSTRAINT ON THE CONTROL

The problem of estimating reachable sets of dynamical control systems with impulsive control and uncertainty in initial data is considered. The impulsive control in the dynamical system belongs to the intersection of the special cone with a generalized ellipsoid both taken in the space of functions of bounded variation. Properties of reachable sets of the control system and algorithm of construction of the internal ellipsoidal estimate of trajectory tubes of impulsive systems are studied.

Key words: reachable set; impulse control; ellipsoidal calculus.

Матвийчук Оксана Георгиевна, Институт математики и механики Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела оптимального управления, e-mail: vog@imm.uran.ru

Matviychuk Oksana Georgievna, Institute for Mathematics and Mechanics of the Ural branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher of the Optimal Control Department, e-mail: vog@imm.uran.ru