Сазонов Анатолий Юрьевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры алгебры и геометрии, e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Sazonov Anatolii Yurievich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Algebra and Geometry Department, e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Фомичева Юлия Геннадиевна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой алгебры и геометрии, e-mail: fomichevajulia@mail.ru

Fomicheva Yulia Gennadievna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, the Head of the Algebra and Geometry Department, e-mail: fomichevajulia@mail.ru

УДК 519.63

ИССЛЕДОВАНИЕ СХЕМЫ С СИММЕТРИЗОВАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© **С.В. Свиридов**

Ключевые слова: уравнения переноса с запаздыванием; численные методы.

В работе для уравнения переноса с функциональным запаздыванием конструируется схема с симметризованными производными, определяется порядок её сходимости. Также в работе приводятся результаты численных экспериментов для уравнений с разными типами запаздывания.

Рассмотрим уравнение переноса с эффектом наследственности

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x,t,u(x,t),u_t(x,\cdot)), \tag{1}$$

$$0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant X,$$

с краевым условием

$$u(0,t) = \gamma(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

и начальным условием

$$u(x,s) = \varphi(x,s),\ 0 \leqslant x \leqslant X,\ -\tau \leqslant s \leqslant 0.$$

Здесь x, t — независимые переменные, $u(x,t)$ — искомая функция, $u_t(x,\cdot) = \{u(x,t+s), -\tau \leqslant s < 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t, $\tau > 0$ — величина запаздывания.

Ранее задача (1) изучалась в [1]. В докладе приводится новый алгоритм, эффективность которого, в сравнении с рассмотренными в [1], подтверждается численными экспериментами.

Произведем дискретизацию задачи. Пусть шаг h по переменной x такой, что $X/h = N \in \mathbb{N}$, обозначим через $x_n = nh \in [0,X]$, $n = 0 \ldots N$. Пусть шаг Δ по переменной t

$N =$ $M =$	40 20	40 40	40 80	80 80	160 80	320 160
1)C1	0.06128	0.03349	0.0195	0.01576	0.01474	0.00732
1)C2	0.05593	0.02772	0.01357	0.01426	0.01436	0.00723
2)C1	0.01271	0.01929	0.02266	0.00965	0.0032	0.0016
2)C2	0.01267	0.01928	0.02265	0.00964	0.00319	0.0016
3)C1	0.01883	0.00667	0.00354	0.00169	0.0012	0.0003
3)C2	0.00174	0.00101	0.00171	0.00026	0.00011	0.00003

Таблица 15: Сравнение максимальной абсолютной погрешности метода (2) для примеров 1–3 и двух способов апроксимации $f^{n-\frac{1}{2}}_{m+\frac{1}{2}}$

такой, что $T/\Delta = M \in \mathbb{N}$, обозначим $t_m = m\Delta \in [-\tau, T]$, $m = -K \dots M$, $K = \tau/\Delta \in \mathbb{N}$. Обозначим $u^n_m \approx u(x_n, t_m)$.

Будем рассматривать аналог метода с симметризованными производными [2]

$$\frac{1}{2\Delta}(u^n_{m+1} + u^{n-1}_{m+1} - u^n_m - u^{n-1}_m) + \frac{a}{2h}(u^n_{m+1} + u^n_m - u^{n-1}_{m+1} - u^{n-1}_m) = f^{n-\frac{1}{2}}_{m+\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

Для определения $f^{n-\frac{1}{2}}_{m+\frac{1}{2}}$ можно применять два способа:

C1) подсчитывать значения функции f в точках (x_n, t_m), (x_{n-1}, t_m), (x_n, t_{m-1}), (x_{n-1}, t_{m-1}), далее посредством интерполяции и экстраполяции определять требуемое;

C2) путем двойной линейной интерполяции и экстраполяции продолжением [1, 3] получать значение функции u в точке $(x_{n-\frac{1}{2}}, t_{m+\frac{1}{2}})$ и ее предыстории, что даст возможность определить искомое значение f.

Т е о р е м а 1. *Метод* (2) *сходится с порядком* $O(\Delta^2 + h^2)$.

Рассмотрим несколько примеров с разным типом запаздывания.

П р и м е р 1. Постоянное запаздывание.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \sin \pi x + \pi t \cos \pi x - (t - \tau) \sin \pi x + u(x, t - \tau),$$

При соответствующих начальных и граничных условий точное решение $u(x,t) = t \sin \pi x$.

П р и м е р 2. Переменное запаздывание.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x,t)}{u(x,\frac{t}{2})} - e^{-\frac{t}{2}},$$

При соответствующих начальных и граничных условий точное решение $u(x,t) = e^{x-t}$.

П р и м е р 3. Распределенное запаздывание.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t} u(x,s)\,ds + e^x(\pi + \frac{1}{\pi}) \cos \pi t,$$

При соответствующих начальных и граничных условий точное решение $u(x,t) = e^x \sin \pi t$.

Как показывают эксперименты, второй тип апроксимации $f^{n-\frac{1}{2}}_{m+\frac{1}{2}}$ демонстрирует лучшие результаты в большинстве экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пименов В.Г., Свиридов С.В.* Сеточные методы решения уравнения переноса с запаздыванием // Вестник Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. № 3. С. 59–74.
2. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. 586 с.
3. *Пименов В.Г.* Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. 134 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Программы развития УрФУ (постановление 211 правительства Российской федерации №02.A03.21.0006 от 27 августа 2013) и РФФИ (проект № 13-01-00089).

Поступила в редакцию 1 июня 2015 г.

Sviridov S.V. INVESTIGATION OF THE SCHEMES WITH SYMMETRIZED DERIVATIVES FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF THE ADVECTION EQUATION WITH DELAY

This paper considers the scheme of symmetrized derivatives for solving the advection equation with functional delay. The order of convergence is constructed here. Also the paper contains some numerical experiments with different types of delay.

Key words: advection equations with delay; numerical methods.

Свиридов Сергей Владимирович, Уральский федеральный университет имени первого президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, ассистент кафедры вычислительной математики, e-mail: sergey.sviridov@urfu.ru

Sviridov Sergey Vladimirovich, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, the Russian Federation, Assistant of the Computational Mathematics Department, e-mail: sergey.sviridov@urfu.ru

УДК 519.178

ЗАМЕЧАНИЕ О НЕЯВНО ЗАДАННЫХ ГИПЕРГРАФАХ

© **А.В. Селиверстов**

Ключевые слова: гиперграф; вложение; инвариант; форма.

Описаны эффективно проверяемые необходимые условия существования вложения рёберно-взвешенных гиперграфов, заданных неявным образом. Обсуждается их применение в биоинформатике.

Важность поиска легко проверяемых условий вложения гиперграфов обусловлена возможностью их применения для решения прикладных задач, в частности, для анализа генных сетей [1]. Отметим, что гиперграфы естественно возникают при изучении сложных регуляторных систем с одновременным воздействием большого числа факторов. Некоторые результаты о спектрах гиперграфов, полезные для классификации и проверки неизоморфности, были получены в работе [2].

Гиперграф называется *рёберно-взвешенным*, если каждому его ребру приписано число — вес ребра. Мы предполагаем, что вес ребра — неотрицательное рациональное число. Если вершины не соединены ребром, соответствующий вес полагаем равным нулю.