Поступила в редакцию 9 июня 2015 г.

Petrov N.N., Shchelchkov K.A. ON CORRELATION OF TWO EVASION PROBLEMS WITH MANY EVADERS

There is considered the problem of conflict interaction of pursuers' and evaders' groups, provided that among the pursuers there are participants whose capabilities are not inferior to the opportunities of evaders as well as participants with fewer opportunities. It is proved that if in the game with equal opportunities for pursuers and evaders evasion of at least one evader on an infinite interval of time occurs, then with the addition of pursuers with fewer opportunities, the evasion of at least one evader is happening on any finite time interval.

Key words: differential game; group pursuit; pursuer; evader; the price of game.

Петров Николай Никандрович, Удмуртский государственный университет, г. Ижевск, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, e-mail: kma3@list.ru

Petrov Nikolai Nikandrovich, Udmurt State University, Izhevsk, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, the Head of the Differential Equations Department, e-mail: kma3@list.ru

Щелчков Кирилл Александрович, Удмуртский государственный университет, г. Ижевск, Российская Федерация, магистрант, e-mail: incognitobox@mail.ru

Shchelchkov Kirill Aleksandrovich, Udmurt State University, Izhevsk, the Russian Federation, Master's degree Student, e-mail: incognitobox@mail.ru

УДК 517.98

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ О СЛАБОЙ ЗАМКНУТОСТИ СУПЕРПОЗИЦИОННОГО МУЛЬТИОПЕРАТОРА

© **Г.Г. Петросян**

Ключевые слова: мультиоператор; слабая сходимость; измеримое сечение; компактное множество.

В работе доказывается теорема о слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора для мультифункции соответствующей многозначному отображению, которое подчиняется условиям типа верхних условий Каратеодори. Данная теорема является обобщением Теоремы 1.5.30 из [1].

Пусть E — банахово пространство и имеется разбиение отрезка $[0,T]$ точками $0 < t_1 < ... < t_m < T, \quad m \geqslant 1$. Обозначим через $Kv(E)$ и $Cv(E)$ совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств E и совокупность всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств E соответственно. Обозначим также символом $\mathcal{PC}^{N-1}([0,T];E)$ пространство функций $z:[0,T]\to E$, непрерывных вместе со своими производными $z^{'}, z^{''}, ..., z^{(N-1)}$ (при $N=1$ просто непрерывных) на $[0,T]\setminus\{t_1,...,t_m\}$ и таких, что левые и правые пределы $z^{(j)}(t_k^-)$ и $z^{(j)}(t_k^+), \quad 0\leqslant j\leqslant N-1, \quad 1\leqslant k\leqslant m$, существуют и $z^{(j)}(t_k^-) = z^{(j)}(t_k)$. При $N=1$, пространство $\mathcal{PC}^0([0,T];E)$ будем обозначать просто $\mathcal{PC}([0,T];E)$.

Нетрудно видеть, что пространство $\mathcal{PC}^{N-1}([0,T];E)$, снабженное нормой

$$\|z\|_{\mathcal{PC}^{N-1}([0,T];E)} = \|z\| + \|z^{'}\| + ... + \|z^{(N-1)}\|,$$

где в правой части равенства рассматриваются обычные нормы равномерной сходимости, является банаховым пространством и что классическое пространство $C^{N-1}([0,T];E)$ является его замкнутым подпространством.

Обозначим $I=[0,T]\setminus\{t_1,...,t_m\}$. Рассмотрим мультиоператор $F: I\times\mathcal{B}\times E^N\to Kv(E)$, удовлетворяющий следующим условиям.

(F_1) Мультифункция $F(\cdot,\vartheta,y):[0,T]\to Kv(E)$ допускает сильно измеримое сечение для всех $(\vartheta,y)\in\mathcal{B}\times E^N$;

(F_2) Мультиотображение $F(t,\cdot,\cdot):\mathcal{B}\times E^N\to Kv(E)$ полунепрерывно сверху (п.н.с.) для п. в. $t\in I$;

(F_3) Существует функция $w\in L^p([0,T])$, $p>\frac{1}{\alpha-N+1}$, такая, что:

$$\|F(t,\vartheta,y)\|:=sup\{\|f\|_E : f\in F(t,\vartheta,y)\}\leqslant w(t)(1+|\vartheta|_{\mathcal{B}}+\|y\|_{E^N}),$$

для всех $(\vartheta,y)\in\mathcal{B}\times E^N$ и п.в. $t\in I$.

Здесь $\mathcal{B}$ обозначает фазовое пространство бесконечных запаздываний Хейла и Като (см. [2]).

Пусть $\mathcal{C}_E(-\infty;T]$ — линейное пространство функций $y:(-\infty;T]\to E$, таких, что $y_0\in\mathcal{B}$ и $\overline{y}=y|_{[0,T]}\in\mathcal{PC}^{N-1}([0,T];E)$, с полунормой:

$$\|y\|_{\mathcal{C}_E(-\infty;T]}=|y_0|_{\mathcal{B}}+\|\overline{y}\|_{\mathcal{PC}^{N-1}([0,T];E)}\,.$$

Для $y\in\mathcal{C}_E(-\infty;T]$ рассмотрим мультифункцию:

$$\Phi_F:[0,T]\to Kv(E),\ \Phi_F(t)=F(t,y_t,y(t),y'(t),y''(t),...,y^{(N-1)}(t)).$$

Ясно, что функции $t\in[0,T]\to y_t\in\mathcal{B}$ и $y^{(i)}:[0,T]\to E^N$, $i=0,1,...,N-1$ кусочно-непрерывны. Тогда мультифункция Φ_F является L^p-интегрируемой.

Пусть $\mathcal{P}_F:\mathcal{C}_E(-\infty;T]\multimap L^p([0,T];E)$ — *суперпозиционный мультиоператор,* заданный следующим образом:

$$\mathcal{P}_F(y)=\mathcal{S}^p_{\Phi_F},$$

где $\mathcal{S}^p_{\Phi_F}$ — множество всех L^p-интегрируемых сечений мультифункции Φ_F.

Нам понадобятся следующие факты (см. [1]).

Т е о р е м а 1. *Пусть $G:X\to K(Y)$ — п.н.с. мультиотображение. Если $A\subset X$ — компактное множество, то его образ $G(A)$ компактен.*

Л е м м а 1. *L^p-полукомпактная последовательность функций $\{\xi_n\}$ слабо компактна, то есть из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Л е м м а 2. (М а з у р а) *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность элементов нормированного пространства, слабо сходящаяся к x. Тогда найдется двойная последовательность неотрицательных чисел $\{\lambda_{ik}\}_{i=1}^{\infty}{}_{k=1}^{\infty}$ такая, что:*

(а) $\sum_{k=i}^{\infty}\lambda_{ik}=1$ для всех $i=1,2,...$;

(б) для каждого $i=1,2,...$ найдется номер $k_0=k_0(i)$ такой, что $\lambda_{ik}=0$ для всех $k\geqslant k_0$;

(в) последовательность выпуклых комбинаций

$$\{\widetilde{x}_i\}_{i=1}^{\infty},\ \widetilde{x}_i=\sum_{k=i}^{\infty}\lambda_{ik}x_k$$

сходится к x по норме.

Л е м м а 3. *Пусть I — компактное множество на числовой прямой $\mathbb{R}$. Если последовательность функций $\{f_n\}\subset L^p(I;E)$ сходится по норме пространства $L^p(I,E)$*

к функции f, *то существует последовательность* $\{f_{n_i}\}$, *которая будет сходится к* f *почти всюду на* I.

Т е о р е м а 2. *Пусть* X, Y *— топологические пространства и* $G : X \to P(Y)$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(а) мультиотображение G *замкнуто;*

(б) для любой пары $x \in X$, $y \in Y$ *такой, что* $y \notin G(x)$, *существуют окрестности* $U(x)$ *точки* x *и* $V(y)$ *точки* y *такие, что* $G(U(x)) \bigcap V(y) = \varnothing$;

(в) для любых последовательностей $\{x_\alpha\} \subset X$, $\{y_\alpha\} \subset Y$ *таких, что* $x_\alpha \to x$, $y_\alpha \in G(x_\alpha)$, $y_\alpha \to y$, *выполнено* $y \in G(x)$.

Приведем теперь наш результат.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\{q_n\}$ *— последовательность в* $\mathcal{C}_E(-\infty;T]$, *сходящаяся к* $q \in \mathcal{C}_E(-\infty;T]$. *Предположим, что существует последовательность* $\{f_n\} \subset L^p([0,T];E)$, $f_n \in \mathcal{P}_F(q_n)$ *слабо сходящаяся к функции* f, *тогда* $f \in \mathcal{P}_F(q)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть E_1 — нормированное пространство, мультиоператор $F : I \times \mathcal{B} \times E^N \to Kv(E)$ удовлетворяет условиям $(F_1) - (F_3)$ и $a : L^p(I,E) \to E_1$ — непрерывный линейный оператор. Докажем сначала, что композиция

$$a \circ \mathcal{P}_F : \mathcal{C}_E(-\infty;T] \to Cv(E_1)$$

замкнутое мультиотображение.

Заметим, что выпуклость значений мультиотображения $a \circ \mathcal{P}_F$ следует из выпуклости значений F и линейности оператора a.

Рассмотрим последовательности $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, $q_n \in \mathcal{C}_E(-\infty;T]$; $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $z_n \in E_1$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty} \|q_n - q\|_{\mathcal{C}_E(-\infty;T]} = 0, \ z_n \in a \circ \mathcal{P}_F(q_n), \ \lim_{n\to\infty} \|z_n - z\|_{E_1} = 0.$$

Выберем последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^p(I,E)$, $f_n \in \mathcal{P}_F(q_n)$, $z_n = a(f_n)$. Применяя условия $(F_2),(F_3)$ и теорему 1 легко вывести из сходимости последовательности $\{q_n\}$, что последовательность $\{f_n\}$ L^p-полукомпактна и, следовательно, в силу леммы 1 она слабо компактна. Переходя к подпоследовательности, мы будем считать, без ущерба для общности, что она слабо сходится к функции $f \in L^p(I,E)$.

Применяя теперь лемму Мазура, мы получаем последовательность $\{\widetilde{f}_i\}_{i=1}^{\infty}, \widetilde{f}_i \in L^p(I,E)$, $\widetilde{f}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ik} f_k$, сходящуюся к f по норме пространства $L^p(I,E)$. Используя лемму 3, мы снова без ущебра для общности будем предполагать, что последовательность $\{\widetilde{f}_i\}$ сходится к f почти всюду на I.

Из условия (F_2) следует, что почти для каждого $t \in I$ по данному $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число $i_0 = i_0(\varepsilon,t)$ такое, что

$$F(t,(q_t)_i, q_i(t), q_i'(t), q_i''(t), ..., q_i^{(N-1)}(t)) \subset F_\varepsilon(t, q_t, q(t), q'(t), q''(t), ..., q^{(N-1)}(t)) \text{ для всех } i \geqslant i_0,$$

где F_ε обозначает ε-окрестность множества.

Но тогда и $f_i(t) \in F_\varepsilon(t, q_t, q(t), q'(t), q''(t), ..., q^{(N-1)}(t))$ для всех $i \geqslant i_0$, а следовательно, в силу выпуклости множества $F_\varepsilon(t, q_t, q(t), q'(t), q''(t), ..., q^{(N-1)}(t))$ и

$$\widetilde{f}_i(t) \in F_\varepsilon(t, q_t, q(t), q'(t), q''(t), ..., q^{(N-1)}(t)) \text{ для всех } i \geqslant i_0.$$

Следовательно

$$f(t) \in F(t, q_t, q(t), q'(t), q''(t), ..., q^{(N-1)}(t)) \text{ п.в. } t \in I,$$

то есть $f \in \mathcal{P}_F(q)$.

С другой стороны,

$$a\left(\widetilde{f_i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ik} a\left(f_k\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ik} z_k,$$

поэтому $\lim_{i\to\infty} \left\| a\left(\widetilde{f_i}\right) - z \right\|_{E_1} = 0$.

Из непрерывности оператора a следует, что $z = a(f)$, поэтому $z \in a \circ \mathcal{P}_F(q)$, тогда применяя теорему 2, получаем истинность вспомогательного утверждения для $a \circ \mathcal{P}_F$.

Из построенного доказательства видно, что мультиоператор $\mathcal{P}_F$ слабо замкнут. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных оторбажений и дифференциальных включений. Издание 2-е, испр. и доп.-М: Книжный дом «Либроком», 2011. 224 с.

2. *Hale J.K., Kato J.* Phase Space for Retarded Equations with Infinite Delay // Funkcial. Ekvac. 1978. № 1, 21. P. 11-41.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантами Российского Фонда Фундаментальных Исследований № 14-01-00468 и № 14-01-92004.

Поступила в редакцию 9 июня 2015 г.

Petrosyan G.G. A THEOREM ON THE WEAK CLOSURE OF SUPERPOSITION MULTIOPERATORS

We prove a theorem on the weak closure of superposition multioperators for multifunction corresponding multivalued mapping, which is subject to conditions such as upper Caratheodory conditions. This theorem is a generalization of Theorem 1.5.30 from [1].

Key words: multioperators; weak convergence; measurable sections; compact set.

Петросян Гарик Гагикович, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры высшей математики, e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Petrosyan Garik Gagikovich, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Higher Mathematics Department, e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

УДК 519.633

NUMERICAL METHOD FOR THE EQUATION WITH FRACTIONAL DERIVATIVE ON STATE AND WITH FUNCTIONAL DELAY ON TIME

© **V.G. Pimenov, A.S. Hendy**

Key words: fractional equation; delay; grid schemes; interpolation; extrapolation; convergence order.

For fractional diffusion equation with functional after-effect on time, the implicit numerical method is constructed and the order of its convergence is obtained. The method is a fractional analogue of the Crank–Nicholson method, and also uses interpolation and extrapolation of the prehistory of model on time.