УДК 519.71
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2113-2120

ОКРЕСТНОСТНЫЕ СИСТЕМЫ И АЛГОРИТМ КАЧМАЖА

© **А. М. Шмырин, Н. М. Мишачев**

Липецкий государственный технический университет
398600, Российская Федерация, г. Липецк, ул. Московская, 30
E-mail: amsh@lipetsk.ru

В статье обсуждается применение алгоритма Качмажа к идентификации окрестностных систем, линейных по идентифицируемым параметрам.
Ключевые слова: окрестностная структура; окрестностная система; масштабирование, алгоритм Качмажа, нейронные сети, жадный алгоритм

1. Окрестностные структуры и окрестностные системы.

Окрестностные структуры (см. [2], [3]) являются средством формализации связей между элементами моделируемой системы. На их основе удобно строить математические модели следующего уровня (системы уравнений). *Окрестностной структурой* мы называем ориентированный граф, содержащий n вершин (узлов) $a_1,\dots,a_n$, каждые две из которых могут быть соединены не более чем двумя противоположно ориентированными ребрами (связями). Каждый вершина может иметь входящие и выходящие ребра. Если имеется ребро из a_i в a_k, то мы говорим, что узел a_k является выходом для a_i и узел a_i является входом для a_k. *In-окрестностью* узла a_i мы называем множество $In(a_i)$ всех его входов, *Out-окрестностью* узла a_i мы называем множество $Out(a_i)$ всех его выходов. Обозначим через $In(i)$ и $Out(i)$ соответствующие наборы индексов. Заметим, что $In(a_i)\cap Out(a_i)$ - это множество всех узлов, имеющих двусторонние связи с узлом a_i. Во многих случаях удобно считать, что в графе есть два дополнительных выделенных узла a_0 и a_∞, таких что a_0 имеет только выходящие ребра, соответствующие внешним входам в систему, и a_∞ имеет только входящие ребра, соответствующие выходам из системы. Тогда $In(i)$ может содержать 0 (но не ∞) и $Out(i)$ может содержать ∞ (но не 0). Далее, каждый узел характеризуется набором переменных состояния и управления $(X(i),U(i))$. Каждое ребро (из a_i в a_k) характеризуется набором переменных состояния и управления $Y(i,k)=(Y_x(i,k),Y_u(i,k))$. В простейшем случае $Y(i,k)=(X(i),U(i))$ (узел передает свои состояния и управления). С окрестностной структурой можно ассоциировать следующие типы систем уравнений:

а) *Система уравнений для узлов.* Здесь мы предполагаем, что переменные всех входов в узел a_i совпадают с переменными состояния и управления входящих узлов, т. е. $Y(k,i)= (X(k),U(k))$ для любого $k\in In(a_i)$. Система уравнений имеет вид

$$X(i)=F_i(U(i),\overline{X}(*),\overline{U}(*)),\quad i=1,\dots,n, \tag{1}$$

где $*$ пробегает $In(i)$. Вектор $(\overline{X}(*),\overline{U}(*))$ может содержать внешние входы $(X(0),U(0))$.

В некоторых случаях уравнения (1) удобнее записывать в неявной форме

$$F_i(X(i),U(i),\overline{X}(*),\overline{U}(*))=0,\quad i=1,\dots,n. \tag{2}$$

Системы вида (2) названы в [1] *окрестностными системами.*

b) *Система уравнений для узлов и связей*

$$\begin{cases} X(i) = F_i(U(i), \overline{Y}(*, i)), \quad i = 1, \dots, n \\ Y_x(i,k) = F_{ik}(X(i), U(i), \overline{Y}(*, i)), \quad i = 1, \dots, n; \ k \in Out(i), \end{cases} \tag{3}$$

где $*$ пробегает $In(i)$. Вектор $\overline{Y}(*, i)$ может содержать внешние входы $Y(0, i)$.

c) *Система уравнений для узлов, динамическая версия*

$$X^{t+1}(i) = F_i(X^t(i), U^t(i), \overline{X}^t(*), \overline{U}^t(*)), \quad i = 1, \dots, n, \tag{4}$$

где $*$ пробегает $In(i)$. Вектор $(\overline{X}^t(*), \overline{U}^t(*))$ может содержать внешние входы $(X^t(0), U^t(0))$.

d) *Система уравнений для узлов и связей, динамическая версия*

$$\begin{cases} X^{t+1}(i) = F_i(X^t(i), U^t(i), \overline{Y}^t(*, i)), \quad i = 1, \dots, n \\ Y_x^{t+1}(i,k) = F_{ik}(X^t(i), U^t(i), \overline{Y}^t(*, i)), \quad i = 1, \dots, n; \ k \in Out(i), \end{cases} \tag{5}$$

где $*$ пробегает $In(i)$. Вектор $\overline{Y}^t(*, i)$ может содержать внешние входы $Y^t(0, i)$.

Замечания.

1. Если к набору связей добавить связи каждого узла с самим собой (петли) то (b) можно будет назвать системой уравнений для связей. В этом случае можно будет еще сказать, что уравнения системы (a) соответствуют диагонали матрицы смежности графа, а уравнения системы (b) – всем ненулевым элементам этой матрицы.

2. Все переменные и уравнения, вообще говоря, являются векторными, и потому формально систему (b) можно переписать в виде (a), если считать все переменные $Y(*, i) = (Y_x(*, i), Y_u(*, i))$ дополнительными компонентами состояния и управления узла $*$. Но в конкретных задачах системы вида (b) могут быть удобнее.

3. Можно еще, как и в [1], различать связи "по состояниям" и "по управлениям", при этом количество возможных ребер графа структуры удвоится. Эта дихотомия фактически уже имеется в системах (1)–(3) – достаточно лишь дополнительно допустить, что в некоторых уравнениях некоторые из переменных $X(*)$, $U(*)$, $Y_x(*, i)$ и $Y_u(*, i)$ могут отсутствовать.

4. Если внутренние параметры состояния $X(i)$ не наблюдаются или не существуют, то системы (3) и (5) упрощаются до систем

$$Y_x(i,k) = F_{ik}(U(i), \overline{Y}(*, i)), \quad i = 1, \dots, n; \ k \in Out(i), \tag{6}$$

$$Y_x^{t+1}(i,k) = F_{ik}(U^t(i), \overline{Y}^t(*, i)), \quad i = 1, \dots, n; \ k \in Out(i), \tag{7}$$

К такому же виду можно привести (1) и (3), исключая переменные внутренних состояний $X(i)$, если они нас не интересуют. Регрессионные модели (см. далее п.2) в этом случае не будут учитывать имеющиеся данные по состояниям что, скорее всего, снизит их качество.

2. Идентификация и сепарабельность.

Далее мы рассматриваем линейные по идентифицируемым параметрам окрестностные системы. В отличие от задачи управления, задача идентификации линейных по идентифицируемым параметрам окрестностных систем, как правило, сепарабельна в том смысле, что она сводится к независимым задачам идентификации отдельных скалярных уравнений для узлов окрестностной структуры (даже если эти скалярные уравнения относятся к одному и тому же узлу). Это связано с тем, что в приложениях мы обычно имеем экспериментальные данные для каждой из переменных, и потому коэффициенты соответствующего уравнения, т. е. идентифицируемые параметры, можно найти как коэффициенты уравнения множественной регрессии. На противоположном полюсе находятся нейронные сети, которые в этом смысле максимально несепарабельны: данные имеются только для входа и выхода сети, а не для входов и выходов отдельных нейронов. Заметим еще, что нейронные сети, рассматриваемые как окрестностные системы, линейны по идентифицируемым параметрам только в случае тождественной функции активации. Последовательная подстановка кортежей экспериментальных данных в какое-либо уравнение линейной по идентифицируемым параметрам окрестностной системы приводит нас к системе линейных уравнений $AZ=B$ относительно неизвестных параметров ("неопределенных коэффициентов") Z исходного уравнения. В других уравнениях окрестностной системы эти параметры не участвуют. Таким образом, задача идентификации параметров (коэффициентов) распадается на N независимых задач, где N - количество скалярных уравнений идентифицируемой системы. В статье [2] для линейных систем данная ситуация подробно описана с помощью матрицы смежности окрестностной структуры и произведения Адамара. Нам для дальнейшего важно только то, что задача идентификации окрестностной системы сводится к решению N (независимых) систем линейных уравнений.

Замечания.

1. На практике нередко встречается ситуация, когда данных мало и система $AZ=B$ – недоопределенная, или когда, даже при большом количестве данных, система плохо обусловлена. Тогда в качестве искомых коэффициентов уравнения множественной регрессии часто берут нормальное решение системы $AZ=B$, что выглядит наилучшим выбором в плохой ситуации. Следует помнить, что в этом случае невозможны оценки статистической значимости найденных коэффициентов, и потому желательно иметь какие-либо дополнительные аргументы в пользу выбора нормального решения.

2. Если *априори* известна какая-либо зависимость между идентифицируемыми коэффициентами разных уравнений (например, равенство некоторых коэффициентов), то сепарабельность идентификации нарушается. Если все зависимости между коэффициентами - линейные, то коэффициенты можно идентифицировать совместно, объединив соответствующие системы линейных уравнений, которые будут теперь иметь общие неизвестные. При этом может оказаться, что кортежей данных станет меньше, чем идентифицируемых коэффициентов, и придется довольствоваться нормальным решением (см. предыдущее замечание). Можно, вместо объединения систем, идентифицировать коэффициенты одного уравнения, подставить их во второе, и затем идентифицировать оставшиеся коэффициенты второго уравнения. Последний способ работает и в случае нелинейных зависимостей между коэффициентами. Заметим, что обсуждаемая причина нарушения сепарабельности на практике встречается редко.

3. Для идентификации систем (4) или (5) кортежи данных должны быть временными рядами.

3. Идентификация и масштабирование.

а) *Масштабирование столбцов системы* $AZ=B$. Замена единиц в матрице смежности окрестностной структуры весовыми коэффициентами, которую можно интерпретировать как переход к *нечетким* окрестностям узлов (см. [1]), приводит к умножению столбцов матрицы A на эти весовые коэффициенты, т. е. к системе $(AD)Z=B$ где D - диагональная матрица. Если экспериментальных данных много и система $AZ=B$ является переопределенной (или определенной) с матрицей A максимального ранга, то $Z_0=A^+B$ будет единственным псевдорешением (минимизирующим невязку) и потому система $(AD)Z=B$ будет иметь единственное псевдорешение $D^{-1}Z_0$. Аналитически это выражается в том, что в этом случае $(AD)^+=D^{-1}A^+$, и значит $(AD)^+B=D^{-1}A^+B=D^{-1}Z_0$. Иначе говоря, введение весовых коэффициентов в этой ситуации эквивалентно изменению единиц измерения и не приводит к каким-либо новым возможностям. Если же экспериментальных данных мало и система $AZ=$ $=B$ является недоопределенной, или если их много, но ранг матрицы A не максимален, то введение весовых "коэффициентов нечеткости" изменит нормальное решение системы $AZ=B$ *нетривиальным образом.* Аналитически это выражается в том, что *формула* $(AD)^+=D^{-1}A^+$

в этом случае неверна. Геометрический смысл нового нормального решения состоит в следующем. Нормальное решение решение уравнения $(AD)Z = B$ – это ближайшая к началу координат точка аффинного подпространства решений L_D этого уравнения, т. е. точка касания некоторой сферы с центром в начале координат и подпространства L_D. Переход к новым координатам W, таким что $Z = D^{-1}W$, возвращает нас к исходной системе уравнений $AW = B$ с прежним (относительно новых координат) аффинным подпространством решений L, но при этом в новых координатах сферы $Z^2 = R^2$ становятся эллипсоидами $(D^{-1}W)^2 = R^2$ или $w_1^2/d_1^2 + \cdots + w_p^2/d_r^2 = R^2$, где r – количество неизвестных. Новое нормальное решение соответствует точке касания такого эллипсоида и подпространства L, при этом найденные координаты этой точки нужно еще умножить на D^{-1}.

Пример 1. Если $d_1 \to 0$ и $d_2 = \cdots = d_r = 1$, то в пределе эллипсоиды сплющиваются в плоскую сферу в подпространстве $w_1 = 0$, и потому искомое нормальное решение, без первой координаты, будет совпадать с нормальным решением сокращенной системы, полученной из системы $AZ = B$ удалением первого столбца. Геометрически это ближайшая к началу координат точка аффинного подпространства $L \cap \{z_1 = 0\}$. Для нахождения первой координаты нужно вычислять (не очевидный) предел; этот предел равен нулю.

Пример 2. Если $d_1 \to \infty$ и $d_2 = \cdots = d_r = 1$, то в пределе эллипсоиды превращаются в цилиндры с осью w_1 и искомое нормальное решение соответствует точке касания такого цилиндра и подпространства L. Это решение, без первой координаты, будет ближайшей к началу координат точкой аффинного подпространства $P_1(L)$, где P_1 – проектирование на подпространство $w_1 = 0$. Для нахождения первой координаты, как и в предыдущем примере, нужно вычислять предел; этот предел, как нетрудно видеть, равен 0.

b) *Масштабирование строк системы* $AZ = B$. Умножение уравнений системы $AZ = B$ на некоторые ненулевые числа, т. е. переход к системе $DAZ = DB$, где D - диагональная матрица, не изменяет множество *настоящих* решений этой системы, если такие есть. Например, это верно для недоопределенных или определенных систем полного ранга. Но если настоящих решений нет, как, например, для типичных переопределенных систем, то эта (с виду безобидная) операция изменяет псевдорешение. Аналитическая причина этого, конечно, в том, что в этом случае $(DA)^+ \neq A^+D^{-1}$. Геометрический смысл тоже ясен: псевдорешение минимизирует сумму квадратов координат вектора невязки, а этот вектор в данной ситуации умножается на D и, таким образом, минимизировать нужно взвешенную сумму квадратов. Иначе говоря, умножение системы слева на диагональную матрицу приводит к взвешенному псевдообращению. Такое масштабирование можно использовать в ситуации, когда кортежи экспериментальных данных имеют приоритеты (например, когда некоторые из данных являются более надежными): нужно умножить систему на матрицу D, диагональ которой является вектором приоритетов кортежей данных. С другой стороны, если все данные равноценны, то, возможно, имеет смысл перейти к системе $DAZ = DB$, где диагональ матрицы D состоит из чисел, обратных к нормам строк матрицы A, т. е. нормировать строки матрица A. В этом случае псевдорешение будет минимизировать сумму квадратов расстояний до гиперплоскостей, заданных уравнениями системы $AZ = B$. Такое решение называют *геометрическим псевдорешением* (или *нормальным геометрическим псевдорешением*, если система несовместна и ранг матрицы A не максимален).

Замечание. Подчеркнем, что приоритетная идентификация, основанная на описанном выше взвешенном псевдообращении, имеет смысл только в тех случаях, когда система $AZ = B$ не имеет настоящих решений.

4. Алгоритм Качмажа и идентификация.

Алгоритм Качмажа [4] решения системы s линейных уравнений $AZ = B$ состоит в следующем. В качестве начального приближения Z^0 берется произвольный вектор. Этот вектор проектируется на гиперплоскость, определяемую первым уравнением системы, результат Z^1

проектируется на гиперплоскость, определяемую вторым уравнением и т. д. Но последнем шаге этого цикла текущий вектор проектируется на первую гиперплоскость и далее описанный цикл повторяется. Рекуррентная формула имеет вид

$$Z^{k+1} = Z^k + \frac{(a^i)^T}{||a^i||} \frac{(b_i - a^i Z^k)}{||a^i||} \tag{8}$$

или

$$Z^{k+1} = Z^k + (a^i)^+ (b_i - a^i Z^k)\,, \tag{9}$$

где a^i, b_i – коэффициенты i-го уравнения системы и $k+1 \equiv i (\mathrm{mod}\, s)$ (s – число уравнений). Можно доказать, что для совместной системы последовательность $Z^0, Z^1, \ldots$ будет сходиться к некоторому решению этой системы и, если в качестве Z^0 взять начало координат, это решение будет нормальным. Если система не совместна, то эта последовательность будет сходится к некоторому предельному циклу. В этом случае можно ввести в рекуррентную формулу множитель релаксации $0 < \lambda_k < 1$, $\Sigma\lambda_k = \infty$, геометрический смысл которого состоит в том, что при очередном проектировании точка немного не доходит до очередной гиперплоскости. Формула с релаксацией имеет вид

$$Z^{k+1} = Z^k + \lambda_k \frac{(a^i)^T}{||a^i||} \frac{(b_i - a^i Z^k)}{||a^i||} \tag{10}$$

или

$$Z^{k+1} = Z^k + (a^i)^+ \lambda_k (b_i - a^i Z^k)\,. \tag{11}$$

Последовательность $Z^0, Z^1, \ldots$ с $Z^0 = 0$ будет сходится к *геометрическому* нормальному псевдорешению системы (см., например, [8]).

Замечания.

1. *Блочный алгоритм Качмажа.* Если уравнения системы $AZ = B$ являются, в свою очередь, системами уравнений, в которых число уравнений меньше числа неизвестных r (т. е. недоопределенными системами), то формулы (5) и (7) задают блочный алгоритм Качмажа, в котором происходят последовательные проектирования на подпространства решений систем $a^i Z = b_i$.

2. В задачах идентификации алгоритм Качмажа успешно заменяет (вычислительно очень затратное) псевдообращение. Кроме того, благодаря своей геометрической наглядности, во многих случаях алгоритм нетрудно модифицировать, для того чтобы учесть дополнительную информацию о структуре данных, например о кластеризации или приоритетах (см. далее п.5).

5. Жадный и рандомизированный алгоритмы Качмажа.

а) *Жадный алгоритм Качмажа.* Скорость сходимости алгоритма Качмажа может зависеть от порядка, в котором записаны уравнения. Пусть, например, уравнения системы задают два кластера гиперплоскостей, внутри каждого из которых гиперплоскости почти параллельны. Сходимость алгоритма Качмажа будет медленной, если кластеры записаны в системе последовательно, и быстрой, если эти кластеры перемешаны. Если вычислены углы между строками a^i матрицы системы (т. е. между соответствующими гиперплоскостями), то для улучшения сходимости можно перенумеровать строки (т. е. уравнения) по следующему “жадному” правилу: первая строка сохраняется, в качестве второй берем ту из оставшихся, которая образует наибольший угол с первой, в качестве третьей ту и из оставшихся, которая образует наибольший угол со второй и т. д. К сожалению, вычисление углов требует примерно $O(s^2 r)$ действий (если число неизвестных в системе равно r), в то время как алгоритм Качмажа - примерно $O(sr)$ действий.

b) *Рандомизированный и взвешенно-рандомизированный алгоритмы Качмажа.* Очевидной альтернативой жадному алгоритму, не требующей вычисления углов, является рандомизация:

в последовательности проектирований нужно брать уравнения системы в случайном порядке. Оценка скорости сходимости рандомизированного метода Качмажа была дана в работе Штремера и Вершинина [5]. Эта работа вызвала интересную дискуссию по поводу рандомизированного метода Качмажа – см. [6] и [7]. Дело в том, в [5] авторы предлагали рандомизацию не по равномерному распределению, а по распределению с вероятностями, пропорциональными длинам строк $||a^i||$ уравнений системы $AZ = B$. Более того, авторы настаивали, что такая взвешенная рандомизация эффективнее равномерной, и даже приводили соответствующий пример. Это утверждение вызвало критику в заметке [7]. Основное возражение авторов этой заметки состояло в том, масштабирование уравнений системы не изменяет соответствующих им гиперплоскостей и потому не влияет на последовательность приближений, которая строится по алгоритму Качмажа. Эффективность взвешенной рандомизации (по сравнению с равномерной) в примере из [5], по мнению авторов заметки [7], является просто следствием удачно подобранного примера. Ответ на [7], опубликованный в [6], был, на наш взгляд, неудовлетворительным и относился ко второстепенным моментам критики.

c) *Взвешенно-рандомизированный алгоритм Качмажа и псевдорешения.* Псевдорешение несовместной системы зависит от масштабирования уравнений системы (см. выше п.3) и, фактически, всегда может рассматриваться как взвешенное по отношению к базовой системе с нормированные строками матрицы A. Переход от нормированной системы к взвешенной, как уже было отмечено в п.3, может быть полезен в задаче приоритетной идентификации. Алгоритм Качмажа сходится к псевдорешению базовой системы, т. е. к *геометрическому* псевдорешению. Для того, чтобы получить сходимость рандомизированного алгоритма Качмажа к взвешенному псевдорешению, т. е. к псевдорешению исходной (не нормированной) системы, нужно заменить равномерную рандомизацию взвешенной (длинами строк матрицы A) рандомизацией, как это сделали авторы статьи [5]. Это наблюдение, возможно, могло бы быть оправданием для применения взвешенной рандомизации в [5], по крайней мере в том случае, когда результаты итераций по алгоритму Качмажа сравниваются с псевдорешением, полученным с помощью псевдообращения матрицы A каким-либо стандартным методом. Но в статье [5] обсуждались переопределенные *совместные* системы, для которых, данное наблюдение бесполезно. Поскольку ситуация существования решения у переопределенных систем очень неустойчива, то возможно, что за счет влияния шумов в примере, рассмотренном в [5], фактически решалась несовместная система и потому сравнение (псевдо)решений, полученного с помощью рандомизированного и взвешенно-рандомизированного алгоритмов Качмажа с (псевдо)решением, полученным в результате обычного псевдообращения, оказалось в пользу взвешенной рандомизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блюмин С.Л., Шмырин А.М.* Окрестностные системы. Липецк: ЛЭГИ, 2005.

2. *Шмырин А.М., Мишачев Н.М., Косарева А.С.* Кластеризация окрестностной структуры // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 2. С. 457–462.

3. *Шмырин А.М., Мишачев Н.М., Косарева А.С.* Метрики на множестве узлов окрестностной структуры // Системы управления и информационные технологии. 2016. Т. 64. № 2. С. 31–35.

4. *Kaczmarz S.* Approximate solution of systems of linear equations // Internat. J. Control. 1993. V. 57. № 6. P. 1269–1271.

5. *Strohmer T., Vershynin R.* A randomized Kaczmarz algorithm with exponential convergence // Journal of Fourier Analysis and Applications. 2009. V. 15(1). P. 262–278.

6. *Strohmer T., Vershynin R.* Comments on the Randomized Kaczmarz Method // Journal of Fourier Analysis and Applications. 2009. V. 15(4). P. 437–440.

7. *Censor Y., Herman G., Jiang M.* A Note on the Behavior of the Randomized Kaczmarz Algorithm of Strohmer and Vershynin // Journal of Fourier Analysis and Applications. 2009. V. 15(4). P. 431–436.

8. *Byrne C.* Convergent Block-Iterative Algorithms for Image Reconstruction from Inconsistent Data. IEEE Transactions on Image Processing IP-6. 1997. P. 1296–1304.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-07-00854 а).

Поступила в редакцию 6 октября 2016 г.

Шмырин Анатолий Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики, e-mail: amsh@lipetsk.ru

Мишачев Николай Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: nmish@lipetsk.ru

UDC 519.71
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2113-2120

NEIGHBORHOOD SYSTEMS AND KACZMARZ ALGORITHM

© **A. M. Shmyrin, N. M. Mishachev**

Lipetsk State Technical University
30 Moskovskaya St., Lipetsk, Russian Federation, 98600
E-mail: amsh@lipetsk.ru

An application of the Kaczmarz algorithm to the identification of neighborhood system, linear with respect to identified parameters, are considered.
Key words: neighborhood structure; neighborhood system; scaling; Kaczmarz algorithm; neural networks; greedy algorithm

REFERENCES

1. *Blyumin S.L., SHmyrin A.M.* Okrestnostnye sistemy. Lipeck: LEHGI, 2005.
2. *SHmyrin A.M., Mishachyov N.M., Kosareva A.S.* Klasterizaciya okrestnostnoj struktury // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences, 2016. T. 21. Vyp. 2. S. 457–462.
3. *SHmyrin A.M., Mishachyov N.M., Kosareva A.S.* Metriki na mnozhestve uzlov okrestnostnoj struktury // Sistemy upravleniya i informacionnye tekhnologii. 2016. T. 64. № 2. S. 31–35.
4. *Kaczmarz S.* Approximate solution of systems of linear equations // Internat. J. Control. 1993. V. 57. № 6. P. 1269–1271.
5. *Strohmer T., Vershynin R.* A randomized Kaczmarz algorithm with exponential convergence // Journal of Fourier Analysis and Applications. 2009. V. 15(1). P. 262–278.
6. *Strohmer T., Vershynin R.* Comments on the Randomized Kaczmarz Method // Journal of Fourier Analysis and Applications. 2009. V. 15(4). P. 437–440.
7. *Censor Y., Herman G., Jiang M.* A Note on the Behavior of the Randomized Kaczmarz Algorithm of Strohmer and Vershynin // Journal of Fourier Analysis and Applications. 2009. V. 15(4). P. 431–436.
8. *Byrne C.* Convergent Block-Iterative Algorithms for Image Reconstruction from Inconsistent Data. IEEE Transactions on Image Processing IP-6. 1997. P. 1296–1304.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 16-07-00854 a).

Received 6 October 2016

Shmyrin Anatoliy Mihaylovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Doctor of Techniques, Professor, the Head of the High Mathematics Department, e-mail: amsh@lipetsk.ru

Mishachev Nikolay Mikhailovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the High Mathematics Department, e-mail:nmish@lipetsk.ru

Информация для цитирования:

Шмырин А.М., Мишачев Н.М. Окрестностные системы и алгоритм Качмажа // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2113-2120. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2113-2120

Shmyrin A.M., Mishachev N.M. Okrestnostnye sistemy i algoritm Kachmazha [Neighborhood systems and Kaczmarz algorithm]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 2113-2120. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2113-2120 (In Russian)