УДК 517.926+517.977

ГЛОБАЛЬНАЯ ЛЯПУНОВСКАЯ ПРИВОДИМОСТЬ И РАВНОМЕРНАЯ ГЛОБАЛЬНАЯ КВАЗИДОСТИЖИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

© **И.В. Инц, А.А. Козлов**

Ключевые слова: глобальная ляпуновская приводимость; равномерная полная управляемость; равномерная глобальная достижимость; равномерная глобальная квазидостижимость.

В работе рассмотрена линейная управляемая система с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами. Для неё введено понятие равномерной глобальной квазидостижимости и установлено, что наличие свойства равномерной глобальной квазидостижимости двумерной рассматриваемой системы является достаточным условием для её глобальной ляпуновской приводимости.

Пусть дана линейная нестационарная управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

в которой матрицы-функции $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ являются локально интегрируемыми и интегрально ограниченными [1, с. 252]. Если управление u задано по принципу линейной обратной связи $u = U(t)x$, где $(m \times n)$-матрица U предполагается измеримой и ограниченной, то система (1) переходит в однородную систему с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0. \tag{2}$$

Наряду с системой (2) рассмотрим также произвольную систему

$$\dot{z} = D(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

с измеримой и интегрально ограниченной матрицей коэффициентов D.

Задача о глобальной ляпуновской приводимости [2, с. 259] линейной системы (2) заключается в нахождении для системы (1) такого измеримого и ограниченного управления, при котором система (2) с этим управлением будет асимптотически эквивалентна (кинематически подобна) [2, с. 56–57] системе (3). Это значает [2, с. 57–58], что будет существовать такое линейное преобразование $x = L(t)z$, связывающее системы (2) и (3), где матрица $L(t)$ (матрица Ляпунова) для всякого $t \geqslant 0$ обратима, кусочно непрерывно дифференцируема, и для неё имеет место неравенство

$$\sup_{t \geqslant 0} \|L(t)\| + \sup_{t \geqslant 0} \|\dot{L}(t)\| + \sup_{t \geqslant 0} \|L^{-1}(t)\| < +\infty.$$

Здесь $\|\cdot\|$ — спектральная (операторная) норма матриц [3, с. 355], то есть матричная норма, индуцированная евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$.

Е.Л. Тонковым было предложено изучать вопрос о наличии свойства глобальной ляпуновской приводимости у системы (2) в предположении равномерной полной управляемости системы (1).

О п р е д е л е н и е 1. [4, 5] Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \geqslant 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ на отрезке

$[t_0, t_0 + \sigma]$ найдется измеримое и ограниченное управление u, при всех $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\|u(t)\| \leqslant \gamma \|x_0\|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) в ноль на этом отрезке.

На основании предложенного подхода Е.К. Макаровым и С.Н. Поповой в 1999 году была доказана [6] глобальная ляпуновская приводимость двумерной системы (2) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами в случае кусочной равномерной непрерывности матрицы B. Позже на основании работы [6] С.Н. Поповой показано [7], что для n-мерной периодической системы (1) равномерная полная управляемость является достаточным условием глобальной ляпуновской приводимости соответствующей однородной системы (2).

Необходимо отметить, что указанные выше результаты получены для систем, у которых матрица B обладает свойством кусочной равномерной непрерывности (такие системы можно назвать медленно изменяющимися). В случае же отказа от наличия такого свойства, то есть при рассмотрении систем (1) с кусочно-непрерывными и ограниченными либо с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами, методы, созданные для медленно изменяющихся систем, оказываются неприменимыми [2, с. 346], и вопрос о глобальной ляпуновской приводимости систем (1) остаётся открытым.

О п р е д е л е н и е 2. [8] Для произвольного $r \geqslant 1$ обозначим множество матриц

$$G(r) := \{H \in M_n : \det H \geqslant 1/r, \|H\| < r\}.$$

Система (2) называется *равномерно глобально достижимой,* если для некоторого $T > 0$ при любом $r \geqslant 1$ существует такое число $d = d(r) > 0$, что для всякой матрицы $H \in G(r)$ и произвольного $t_0 \geqslant 0$ на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ найдётся такое кусочно-непрерывное и ограниченное управление U, удовлетворяющее условию $\|U\| \leqslant d$ для всех $t \in [t_0, t_0 + T]$, при котором для матрицы Коши $X_U(t, s)$, $t, s \geqslant 0$, системы (2) с этим управлением обеспечивается равенство $X_U(t_0 + T, t_0) = H$.

Известно [8], что наличие у системы (2) свойства равномерной глобальной достижимости является достаточным условием её глобальной ляпуновской приводимости. В данной работе нами установлено, что для двумерных систем с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами достаточным условием глобальной ляпуновской приводимости является более слабое, по сравнению с понятием равномерной глобальной достижимости, условие — наличие у системы (2) свойства равномерной глобальной квазидостижимости.

О п р е д е л е н и е 3. Для произвольного $r \geqslant 1$ обозначим множество верхнетреугольных матриц с положительными диагональными элементами

$$G_{\triangle}(r) := \{H \in M_n : \det H \geqslant 1/r, \|H\| < r\}.$$

Система (2) обладает свойством *равномерной глобальной квазидостижимости,* если для некоторого $T > 0$ при любых $r \geqslant 1$ и $t_0 \geqslant 0$ для всякой матрицы $H \in G_{\triangle}(r)$ на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ найдутся такое число $d = d(r) > 0$, ортогональная матрица $F \in M_n$ и измеримое и ограниченное управление U, удовлетворяющее условию $\|U\| \leqslant d$ для всех $t \in [t_0, t_0 + T]$, при котором для матрицы Коши $X_U(t, s)$, $t, s \geqslant 0$, системы (2) с этим управлением обеспечивается равенство $X_U(t_0 + T, t_0) = X(t_0 + T, t_0) F H F^{-1}$, где $X(t, s)$, $t, s \geqslant 0$ — матрица Коши системы (2) с нулевым управлением.

Имеет место

Т е о р е м а 1. *Пусть* $n = 2$ *и* $m \in \{1, 2\}$. *Если система* (2) *равномерно глобально квазидостижима, то она глобально ляпуновски приводима.*

Связь свойства равномерной полной управляемости системы (1) со свойством равномерной глобальной квазидостижимости соответствующей однородной системы (2) устанавливает

Т е о р е м а 2. *Пусть* $n = 2$ *и* $m \in \{1, 2\}$. *Если система* (1) *обладает свойством равномерной полной управляемости, то соответствующая однородная система* (2) *обладает свойством равномерной глобальной квазидостижимости.*

Из теорем 1 и 2 очевидным образом вытекает

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $n = 2$ *и* $m \in \{1, 2\}$. *Если система* (1) *обладает свойством равномерной полной управляемости, то соответствующая однородная система* (2) *глобально ляпуновски приводима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.

2. *Макаров Е.К., Попова С.Н.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука, 2012.

3. *Хорн Р.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

4. *Тонков Е.Л.* Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.

5. *Kalman R.E.* Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sosiedad Matematika Mexicana, 1960. V. 5. № 1. P. 102–119.

6. *Макаров Е.К., Попова С.Н.* О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 97–106.

7.*Попова С.Н.* Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 12. С. 1627–1636.

8. *Зайцев В.А.* Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трёхмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами // Вестник Удмуртского ун-та. Серия: Математика. 2003. С. 31-62.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом №Ф13М-055 Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Поступила в редакцию 10 июня 2015 г.

Ints I.V., Kozlov A.A. GLOBAL LYAPUNOV REDUCIBILITY AND UNIFORM GLOBAL QUASI-ATTAINABILITY OF LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS

The paper considers the linear control system with locally integrable and integrally bounded coefficients. For her, we have defined the concept of uniform global quasi-attainability, and found that the presence of property of uniform global quasi-attainability of observe two-dimensional system a sufficient condition for its global Lyapunov reducible.

Key words: global Lyapunov reducibility; uniform global controllability; uniform global attainability; uniform global quasi-attainability.

Инц Ирина Викторовна, Полоцкий государственный университет, г. Новополоцк, Беларусь, аспирант кафедры высшей математики, e-mail: i.ints@mail.ru

Ints Irina Viktorovna, Polotsk State University, Novopolotsk, Belarus, Post-graduate Student of the Higher Mathematics Department, e-mail: i.ints@mail.ru

Козлов Александр Александрович, Полоцкий государственный университет, г. Новополоцк, Беларусь, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики, e-mail: kozlovaa@tut.by

Kozlov Aleksandr Aleksandrovich, Polotsk State University, Novopolotsk, Belarus, Candidate of Physics and Mathematics, the Head of the Higher Mathematics Department, e-mail: kozlovaa@tut.by