

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ТИПА КОШИ

© М.С. Афанасова

Ключевые слова: интегральный оператор; равностепенно непрерывное множество; слабая сходимость; мера некомпактности.

В настоящей работе рассматриваются и доказываются свойства интегрального оператора типа Коши (равностепенная непрерывность и замкнутость образа оператора).

Пусть E — банахово пространство. Рассмотрим $S : L^p([0, a]; E) \rightarrow C([0, a]; E)$,

$$S(\phi)(t) = \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{T}(t-s) \phi(s) ds$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(t) &= q \int_0^\infty \theta \xi_q(\theta) T(t^q \theta) d\theta, \quad \xi_q(\theta) = \frac{1}{q} \theta^{-1-\frac{1}{q}} \Psi_q(\theta^{-1/q}), \\ \Psi_q(\theta) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \theta^{-qn-1} \frac{\Gamma(nq+1)}{n!} \sin(n\pi q), \quad \theta \in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

Γ — гамма-функция Эйлера, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ — C_0 — полугруппа и $M = \sup \{\|T(t)\|; t \in [0, a]\}$.

$$\int_0^\infty \theta \xi_q(\theta) d\theta = \frac{1}{\Gamma(q+1)} \quad (1)$$

Оператор S мы будем называть оператором типа Коши (см.[1]).

Л е м м а 1. *Операторы $\mathcal{T}(t)$ обладают следующими свойствами:*

1) Для любого $t \in [0, a]$ $\mathcal{T}(t)$ являются линейными ограниченными операторами, т. е.

$$\|\mathcal{T}(t)x\|_E \leq \frac{qM}{\Gamma(1+q)} \|x\|_E$$

2) Операторы $\mathcal{T}(t)$ — сильно непрерывны для всех $t \in [0, a]$.

Т е о р е м а 1. *Оператор S обладает следующими свойствами:*

(S_1) *существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\|S(\xi)(t) - S(\eta)(t)\|_E^p \leq C^p \int_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p ds, \quad \xi, \eta \in L^p([0, a]);$$

(S_2) *для каждого компактного множества $K \subset E$ и последовательности $\{\eta_n\} \subset L^p([0, a]; E)$ такой, что $\{\eta_n(t)\} \subset K$ для почти всех $t \in [0, a]$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$, существует $\omega_n \in L^\infty[0, a]$ такая, что $\|\eta_n(t)\|_E \leq \omega_n$, тогда слабая сходимость $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ влечет сходимость $S(\eta_n) \rightarrow S(\eta_0)$ в $C([0, a]; E)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (S_1): Используя неравенство Гельдера, мы получим:

$$\|S(\xi)(t) - S(\eta)(t)\|_E \leq \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{T}(t-s) \|\xi(s) - \eta(s)\|_E ds \leq$$

$$\leq \frac{qM}{\Gamma(1+q)} \left[\int_0^t (t-s)^{\frac{(q-1)p}{p-1}} ds \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p ds \right]^{\frac{1}{p}}$$

Тогда

$$\|S(\xi)(t) - S(\eta)(t)\|_E^p \leq C^p \int_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p ds,$$

где

$$C = \left[\frac{p-1}{qp-1} \right]^{\frac{p-1}{p}} \frac{qMT^{q-\frac{1}{p}}}{\Gamma(1+q)}$$

(S₂) Пусть χ_E -мера некомпактности Хаусдорфа в E , тогда:

$$\chi_E \left(\{S(\eta_m)(t)\} \right) \leq \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{T}(t-s) \chi_E(\{\eta_m\}) ds = 0$$

Это означает, что последовательность $\{S(\eta_m)(t)\}_{n=1}^\infty \subset E$ относительно компактна для каждого $t \in [0, a]$.

С другой стороны, если мы возьмем $t_1, t_2 \in [0, a]$ такие, что $0 < t_1 < t_2 \leq a$, то применяя (1), Лемму 1 и теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, мы имеем:

$$\begin{aligned} & \|S(\eta_m)(t_2) - S(\eta_m)(t_1)\|_E = \\ & = \left\| \int_0^{t_2} (t_2-s)^{q-1} \mathcal{T}(t_2-s) \eta_m(s) ds - \int_0^{t_1} (t_1-s)^{q-1} \mathcal{T}(t_1-s) \eta_m(s) ds \right\|_E = \\ & = \left\| q \int_0^{t_2} \int_0^\infty \theta (t_2-s)^{q-1} \xi_q(\theta) T\left((t_2-s)^q \theta\right) \eta_m(s) d\theta ds - \right. \\ & \quad \left. - q \int_0^{t_1} \int_0^\infty \theta (t_1-s)^{q-1} \xi_q(\theta) T\left((t_1-s)^q \theta\right) \eta_m(s) d\theta ds \right\|_E \leq \\ & \leq \left\| q \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\infty \theta (t_2-s)^{q-1} \xi_q(\theta) T\left((t_2-s)^q \theta\right) \eta_m(s) d\theta ds \right\|_E + \\ & \quad + \left\| q \int_0^{t_1} \int_0^\infty \theta (t_2-s)^{q-1} \xi_q(\theta) T\left((t_2-s)^q \theta\right) \eta_m(s) d\theta ds - \right. \\ & \quad \left. - q \int_0^{t_1} \int_0^\infty \theta (t_1-s)^{q-1} \xi_q(\theta) T\left((t_2-s)^q \theta\right) \eta_m(s) d\theta ds \right\|_E + \\ & \quad + \left\| q \int_0^{t_1} \int_0^\infty \theta (t_1-s)^{q-1} \xi_q(\theta) T\left((t_2-s)^q \theta\right) \eta_m(s) d\theta ds - \right. \\ & \quad \left. - q \int_0^{t_1} \int_0^\infty \theta (t_1-s)^{q-1} \xi_q(\theta) T\left((t_1-s)^q \theta\right) \eta_m(s) d\theta ds \right\|_E = \\ & = \left\| q \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\infty \theta (t_2-s)^{q-1} \xi_q(\theta) T\left((t_2-s)^q \theta\right) \eta_m(s) d\theta ds \right\|_E + \\ & \quad + \left\| q \int_0^{t_1} \int_0^\infty \theta \left[(t_2-s)^{q-1} - (t_1-s)^{q-1} \right] \xi_q(\theta) T\left((t_2-s)^q \theta\right) \eta_m(s) d\theta ds \right\|_E + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| q \int_0^{t_1} \int_0^\infty \theta (t_1 - s)^{q-1} \xi_q(\theta) \left[T\left((t_2 - s)^q \theta\right) - T\left((t_1 - s)^q \theta\right) \right] \eta_n(s) d\theta ds \right\|_E \leq \\
& \leq q \frac{M}{\Gamma(1+q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} \|\eta_n(s)\|_E ds + \\
& + q \frac{M}{\Gamma(1+q)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1} \right] \|\eta_n(s)\|_E ds + \\
& + q \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \int_0^{t_1} \int_0^\infty \theta (t_1 - s)^{q-1} \xi_q(\theta) \left\| T\left((t_2 - s)^q \theta\right) \eta_n(s) - T\left((t_1 - s)^q \theta\right) \eta_n(s) \right\|_E d\theta ds \leq \\
& \leq \frac{qM}{\Gamma(1+q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} \|\eta_n(s)\|_E ds + \\
& + \frac{qM}{\Gamma(1+q)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1} \right] \|\eta_n(s)\|_E ds + \\
& + q \int_0^{t_1} \int_0^\infty \theta (t_1 - s)^{q-1} \xi_q(\theta) \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left\| T\left((t_2 - s)^q \theta\right) \eta_n(s) - T\left((t_1 - s)^q \theta\right) \eta_n(s) \right\|_E d\theta ds
\end{aligned}$$

Так как $\{\eta_n(s)\} \subset K$ для почти всех $s \in [0, a]$, то правая часть последнего неравенства равномерно, относительно n стремится к 0 при $t_2 \rightarrow t_1$. Поэтому последовательность $\{S(\eta_n)\}$ равномерно непрерывна. Из теоремы Арцела–Асколи получаем, что последовательность $\{S(\eta_n)\} \subset C([0, a]; E)$ относительно компактна.

Из свойства (S_1) вытекает, что $S: L^p([0, a]; E) \rightarrow C([0, a]; E)$ — ограниченный линейный оператор. Тогда слабая сходимость $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ влечет $S(\eta_n) \rightharpoonup S(\eta_0)$. Поскольку последовательность $\{S(\eta_n)\}$ относительно компактна, приходим к выводу, что $S(\eta_n) \rightarrow S(\eta_0)$ в $C([0, a]; E)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005.
2. Обуховский В.В., Петросян Г.Г. О задаче Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с импульсными характеристиками в банаховом пространстве // Вестник ВГУ. Серия: ФМ. Воронеж, 2013. № 1. С. 192-209.

Поступила в редакцию 15 мая 2015 г.

Afanasova M.S. ON SOME PROPERTIES OF THE CAUCHY TYPE INTEGRAL OPERATOR

In this paper we consider and prove properties of the Cauchy type integral operator (uniform continuity and closure of the image of the operator).

Key words: integral operator; equicontinuous set; weak convergence; measure of non-compactness.

Афанасова Мария Сергеевна, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, магистрант кафедры высшей математики, e-mail: marya.afanasowa@yandex.ru

Afanasova Maria Sergeevna, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation, Master's degree Student of the Higher Mathematics Department, e-mail: marya.afanasowa@yandex.ru