Сумин Виктор Иванович, Воронежский институт ФСИН России, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры управления и информационно-технического обеспечения, email: viktorsumin51@yandex.ru

Sumin Viktor Ivanovich, Voronezh Institute of the Federal Penitentiary Service (VIFSIN), Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Techniques, Professor of the Management and Information Technology Department, email: viktorsumin51@yandex.ru

УДК 517.988.6

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЯХ С СЮРЪЕКТИВНЫМИ КВАЗИОБРАТИМЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

© С.С. Губина

Ключевые слова: квазиобратимый оператор; сюръективный оператор; топологическая степень; операторное уравнение.

В настоящей статье изучается операторное уравнение с линейным сюръективным оператором A, который может быть не замкнут, но обладает непрерывным правым обратным отображением. Рассматривается теорема существования множества решений операторного уравнения $A(x) = f(x)$, где A — линейный сюръективный оператор, а f — вполне непрерывное отображение, и приводятся приложения этой теоремы.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \longrightarrow E_2$ — линейный сюръективный оператор.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что оператор A является квазиобратимым, если у оператора A существует правое обратное непрерывное отображение $p : E_2 \to E_1$, т. е. такое отображение p, что $A(p(y)) = y$ для любого $y \in E_2$. В этом случае отображение p будем называть квазиобратным к оператору A.

В дальнейшем будем пологать, что оператор $A : D(A) \subset E_1 \longrightarrow E_2$ квазиобратим и p является отображением квазиобратным к A.

Примеры квазиобратимых операторов и их свойства приведены в [1], [2], [3].

Пусть $V \subset E_1$ — ограниченное открытое множество, $f : \overline{V} \to E_2$ — непрерывное отображение. $N(A, f)$ — множество решений уравнения $A(x) = f(x)$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что отображение f является (A, p)-вполне непрерывным, если композиция $p \circ f$ является вполне непрерывным отображением.

Т е о р е м а 1. *Пусть существует такое квазиобратное к оператору A отображение p, что отображение f является (A, p)-вполне непрерывным отображением и $q = p \circ f : \overline{V} \to E_1$ не имеет неподвижных точек на ∂V.*

Если топологическая степень $\gamma(i - q, \partial V) \neq 0$, то $N(A, f) \neq \emptyset$.

Если же кроме этого $dim(Ker(A)) > 0$, то $N(A, f) \cap \partial V \neq \emptyset$ и $dim(N(A, f)) \geqslant \geqslant dim(Ker(A))$.

При доказательстве этой теоремы используются свойства топологической степени вполне непрерывных отображений [4] и теоремы о топологической размерности множества неподвижных точек многозначных отображений, доказанные в работе [5]. Доказательство теоремы 1 см. [1].

Рассмотрим следствие из теоремы 1.

Пусть $B_R[0]$ — замкнутый шар радиуса R с центром в нуле пространства E_1. Пусть существует число $m > 0$ такое, что для любого $y \in E_2$ выполняется неравенство:

$$||p(y)|| \leqslant m||y||.$$

Обозначим $||p|| = inf\,\{m \mid y \in E_2,\ \ ||p(y)|| \leqslant m||y||\}$.

Т е о р е м а 2. *Пусть $f : E_1 \to E_2$ является (A,p)-вполне непрерывным отображением. Если существуют такие числа $c \geqslant 0$ и $d \geqslant 0$, что $||f(x)|| \leqslant c||x|| + d$ для любого $x \in E_1$ и $c||p|| < 1$, то $N(A,f) \neq \varnothing$.*

Если, кроме того, $dim(Ker(A)) > 0$, то $dim(N(A,f)) \geqslant dim(Ker(A))$.

Доказательство. Пусть R — некоторое положительное число. Очевидно, что для любого $x \in B_R[0]$ выполнено неравенство

$$||p(f(x))|| \leqslant ||p||\ ||f(x)|| \leqslant ||p||c||x|| + ||p||d.$$

Также заметим, что если $||p||cR + ||p||d < R$, то

$$R > \frac{||p||d}{1 - ||p||c}.$$

Таким образом, если $R > \frac{||p||d}{1-||p||c}$, то композиция $p \circ f : B_R[0] \to B_R[0]$ и на границе шара $B_R[0]$ не имеет неподвижных точек. Тогда

$$\gamma(i - p \circ f, B_R[0]) = 1.$$

Так как число R может принимать любые достаточно большие значения, то утверждение теоремы вытекает из теоремы 1. Теорема доказана.

Рассмотрим применение теоремы 1 к изучению вырожденных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.

Пусть $E_1, E_2, ..., E_{n+1}$ — банаховы пространства,

$$A_i : D(A_i) \subset E_i \to E_{i+1},$$

где $i = 1, 2, ..., n$ являются замкнутыми сюръективными линейными операторами. Определим оператор

$$C = A_n \circ A_{n-1} \circ ... \circ A_1.$$

Областью опеределения этого оператора является множество

$$D(C) = A_1^{-1}(A_2^{-1}(...(A_{n-1}^{-1}(D(A_n)))...)).$$

Пусть $x_0 \in D(C)$ — некоторая точка, $B_R[x_0]$ — замкнутый шар радиуса R с центром в x_0, $B_R[x_0] = \{x \in E_1 \mid ||x - x_0|| \leqslant R\}$, $f : [0,T] \times B_R[x_0] \to E_{n+1}$ — вполне непрерывное отображение.

Рассмотрим задачу:

$$C(x'(t)) = f(t, x(t)), x(0) = x_0.$$

Решением задачи на промежутке $[0,h]$, $0 < h \leqslant T$, называется непрерывно дифференцируемая функция $x_* : [0,h] \to D(C) \subset E_1$ такая, что

$$C(x_*'(t)) = f(t, x_*(t))$$

для любого $t \in [0, h]$ и $x_*(0) = x_0$.

Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 3. *При сделанных предположениях существует число* $h_0 > 0$ *такое, что задача* $C(x'(t)) = f(t, x(t)), x(0) = x_0$ *имеет решение на промежутке* $[0, h_0]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельман Б.Д., Рыданова С.С.* Об операторных уравнениях с сюръективными операторами // Вестник Воронежского Государственного Университета. Серия: Физика. Математика. Воронеж, 2012. № 1. С. 93-98.

2. *Рыданова С.С.* Об одном классе операторных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1173-1174.

3. *Губина С.С.* Теорема Борсука-Улама для квазиобратимых операторов. Некоторые приложения // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 5. С. 2496-2498.

4. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М., 1975.

5. *Гельман Б.Д.* Топологические свойства множества неподвижных точек многозначных отображений // Математический сборник. 1997. Т. 188. № 12. С. 33-56.

Поступила в редакцию 9 июня 2015 г.

Gubina S.S. ABOUT OPERATOR EQUATIONS WITH SURJECTIVE QUASI INVERTIBLE OPERATORS

This article examines operator equation with a linear surjective operator A which can be not closed, but has a continuous right inverse mapping. The existence theorem for the solutions set of the operator equation $A(x) = f(x)$, where A is a surjective linear operator, and f is a completely continuous mapping, is proven; the applications of the theorem are considered.

Key words: quasi invertible operator; surjective operator; topological degree; operator equation.

Губина Светлана Сергеевна, Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры математики, e-mail: rydanova_vrn@mail.ru

Gubina Svetlana Sergeevna, Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Lecturer of the Mathematics Department, e-mail: rydanova_vrn@mail.ru

УДК 517.977.1

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ МЕТОДА ВНЕШНИХ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ДОСТИЖИМОСТИ ПРИ КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

© М.И. Гусев

Ключевые слова: управляемая система; пучок траекторий; множество достижимости; фазовые ограничения; метод штрафных функций.

Рассматривается задача о построении внешних аппроксимаций пучков траекторий нелинейной управляемой системы с фазовыми ограничениями. Изучается аналог метода штрафных функций, состоящий в замене исходной системы с фазовыми ограничениями вспомогательной системой без ограничений.