

УДК 517.977

О ГАРАНТИРОВАННОМ УПРАВЛЕНИИ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ЧАСТИ КООРДИНАТ

© В.И. Максимов

Ключевые слова: гарантированное управление; метод экстремального сдвига.

Теория управления в условиях неполной информации — один из интенсивно развивающихся разделов современной математики. В настоящей заметке в рамках этого раздела обсуждается вопрос управления одной динамической системой при измерении части фазовых координат и при влиянии на систему неконтролируемых воздействий. Именно, рассматривается задача игрового управления нелинейной распределенной системой, введенной в работе [1]. Цель данной заметки заключается в описании устойчивых алгоритмов ее решения. Предлагаемые алгоритмы основываются на конструкциях теории динамического обращения и методе экстремального сдвига.

1. Введение. Рассматривается система

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi + l\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \Delta_L\psi + Bu - Cv \quad \text{в } \Omega \times (t_0, \vartheta], \quad \vartheta = \text{const} < +\infty, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \Delta_L\varphi + g(\varphi) + \psi \quad (2)$$

с граничным

$$\frac{\partial}{\partial n}\psi = \frac{\partial}{\partial n}\varphi = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (t_0, \vartheta] \quad (3)$$

и начальным

$$\psi(t_0) = \psi_0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0 \quad \text{в } \Omega \quad (4)$$

условиями. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, Δ_L — оператор Лапласа, $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали, $(U, |\cdot|_U)$ и $(V, |\cdot|_V)$ — банаховы пространства, $B \in \mathcal{L}(U; H)$ и $C \in \mathcal{L}(V; H)$ — линейные непрерывные операторы, $g(\varphi) = a\varphi + b\varphi^2(t, \eta) - c\varphi^3(t, \eta)$, $\psi(t, \eta)$ описывает температуру среды, $\varphi(t, \eta)$ характеризует различие между твердой и жидкой подобластями Ω , $l > 0$ — константа, $a(t, \eta)$, $b(t, \eta) \in L_\infty(T \times \Omega)$ и $c(\eta) \in L_\infty(\Omega)$ — заданные функции, $c(\eta) \geq c > 0$ при п.в. $\eta \in \Omega$, $\psi_0(\eta)$ и $\varphi_0(\eta)$ — начальные состояния. Система (1)–(4) моделирует процесс отвердевания жидкого вещества.

Будем полагать, что начальные состояния ψ_0 и φ_0 являются элементами пространства $W_\infty^2(\Omega)$, удовлетворяющими условиям $\frac{\partial}{\partial n}\psi_0 = \frac{\partial}{\partial n}\varphi_0 = 0$, на $\partial\Omega$. В дальнейшем символом $W_2^{2,1}(Q)$, $Q = \Omega \times (0, \vartheta)$, обозначаем соболевское пространство

$$W_2^{2,1}(Q) = \left\{ u \mid u, \frac{\partial u}{\partial \eta_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_i \partial \eta_j}, \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q) \right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} = \left(\int_\Omega |u|^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial \eta_i} \right|^2 + \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 d\eta dt \right)^{1/2};$$

символы $(\cdot, \cdot)_H$ и $|\cdot|_H$ означают, соответственно, скалярное произведение и норму в пространстве $H = L_2(\Omega)$.

Для каждого начального состояния $x_0 = \{\psi_0, \varphi_0\}$ и функций $u(\cdot) \in L_\infty(T; U)$, $v(\cdot) \in L_\infty(T; V)$ решение системы S — (1)–(4) — $x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot)) = \{\psi(\cdot; t_0, \psi_0, u(\cdot), v(\cdot)), \varphi(\cdot; t_0, \varphi_0, u(\cdot), v(\cdot))\}$ есть единственная функция $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot)) \in V_T^{(1)} = V_1 \times V_1$, $V_1 = W_2^{2,1}(Q)$ удовлетворяющая (1)–(4).

Обсуждаемая задача состоит в следующем. Задана система S и некоторый критерий качества I . В дискретные моменты времени $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\tau_m = T$, измеряется (с ошибкой) величина фазовой функции системы φ . Результаты измерения $\xi_i^h \in H$ удовлетворяют неравенству

$$|\varphi(\tau_i) - \xi_i^h|_H \leq h. \quad (5)$$

Здесь $h \in (0, 1)$ — уровень информационной погрешности. Имеется два игрока-антагониста. Одного из них назовем партнером, второго — оппонентом. Пусть $P \subset U$ и $E \subset V$ — выпуклые замкнутые множества. Задача партнера состоит в построении закона (стратегии) формирования управления u (со значениями в P) по принципу обратной связи (на основе измерения величин $\varphi(\tau_i)$) такого, что порожденное им управление минимизирует значение критерия качества. Задача, стоящая перед оппонентом, противоположная. Она состоит в выборе закона (стратегии) формирования управления v (со значениями в E) также по принципу обратной связи (на основе измерения величин $\varphi(\tau_i)$) такого, что порожденное им управление максимизирует значение критерия качества.

Один из подходов к решению задач гарантированного управления для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями был предложен и развит в [2, 3]. Основы теории гарантированного управления для систем с распределенными параметрами с позиций формализации, предложенной в [2], были заложены в работе [4]. В указанных работах был рассмотрен случай, когда измеряются все фазовые состояния систем. В настоящей работе, продолжающей исследования [2–4] задачи гарантированного управления (партнера или оппонента) рассматриваются при измерении лишь «части» фазового состояния системы.

Для формирования управления u , обеспечивающего решение задачи стоящей перед партнером, наряду с информацией о значениях ξ_i^h , удовлетворяющих (5), необходима информация о координате $\psi(\cdot)$, которая отсутствует. Чтобы получать такую информацию по ходу функционирования системы S мы воспользуемся подходом, развитым в работах [5–7]. Следуя этому подходу, мы введем вспомогательную систему, описываемую уравнением, имеющим выход $w_1(t, \eta)$, $t \in T$, $\eta \in \Omega$ и вход $p^h(t, \eta)$, $t \in T$, $\eta \in \Omega$. Входом $p^h(\cdot)$ является некоторое управление, которое формируется по принципу обратной связи таким образом, что $p^h(\cdot)$ аппроксимирует в среднеквадратичной метрике неизвестную координату $\psi(\cdot)$. Ситуация с оппонентом аналогична. Для решения стоящей перед ним проблемы, ему также необходима информация о координате $\psi(\cdot)$.

2. Схема решения. Постановка задачи. Опишем схему решения задачи партнером. Сначала вводятся две вспомогательные системы M_1 и M_2 . Система M_1 имеет вход $u^*(\cdot)$ и выход $w(\cdot)$, а система M_2 — вход $p^h(\cdot)$ и выход $w_1(\cdot)$. Система M_2 с законом выбора управления \mathcal{V}_1 служит для восстановления ненаблюдаемой координаты, а системы M_1 и S (с соответствующим законом выбора управления) для решения собственно задачи, стоящей перед партнером.

До начала работы алгоритма фиксируются величина h и разбиение Δ с шагом δ , а также программное управление $u^*(\cdot)$. Затем организуется процесс синхронного управления системами S , M_1 и M_2 на отрезке T . Этот процесс разбивается на $(m - 1)$ однотипных шагов. Во время i -го шага, осуществляемого на промежутке $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, выполняются

следующие операции. Сначала, в момент τ_i , в соответствии с априори выбранными законами \mathcal{V}_1 и \mathcal{U} вычисляются элементы

$$p_i^h \in \mathcal{V}_1(\tau_i, \xi_i^h, w_1(\tau_i)), \quad u_i^h \in \mathcal{U}(\tau_i, \xi_i^h, p_i^h, w(\tau_i)). \quad (6)$$

Затем (вплоть до момента τ_{i+1}) управление $p^h(t) = p_i^h$, $\tau_i \leq t \leq \tau_{i+1}$, подается на вход системы M_2 , а управление $u^h(t) = u_i^h$, $\tau_i \leq t < \tau_{i+1}$, — на вход системы S . В результате действия этих управлений, а также заданного управления $u^*(t)$, $\tau_i \leq t \leq \tau_{i+1}$, и неизвестного управления оппонента $v(t)$, $\tau_i \leq t \leq \tau_{i+1}$, реализуются состояния $x(\tau_{i+1})$, $w(\tau_{i+1})$ и $w_1(\tau_{i+1})$. Процедура заканчивается в момент ϑ .

Схема решения задачи оппонента аналогична описанной выше. Сначала вводятся две вспомогательные системы M_3 и M_2 . Система M_3 имеет вход $v^*(\cdot)$ и выход $z(\cdot)$, а система M_2 — вход $p^h(\cdot)$ и выход $w_1(\cdot)$. Система M_2 (аналогичная используемой партнером) с законом выбора управления \mathcal{V}_1 служит для восстановления $\psi(\cdot)$, а системы M_3 и S (с соответствующим законом выбора управления) для решения собственно задачи, стоящей перед оппонентом.

До начала работы алгоритма фиксируются величина h и разбиение Δ . Затем организуется процесс синхронного управления системами S , M_3 и M_2 на отрезке T . Процесс разбивается на $(m-1)$ однотипных шагов. Во время i -го шага, выполняемого на промежутке $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i , в соответствии с априори выбранными законами \mathcal{V}_1 , \mathcal{V}_2 и \mathcal{V} вычисляются элементы

$$\begin{aligned} p_i^h &\in \mathcal{V}_1(\tau_i, \xi_i^h, w_1(\tau_i)), & v_i^h &\in \mathcal{V}(\tau_i, \xi_i^h, p_i^h, z(\tau_i)), \\ v_i^* &\in \mathcal{V}_2(\tau_i, \xi_i^h, p_i^h, z(\tau_i)). \end{aligned} \quad (7)$$

Затем (до момента τ_{i+1}) управление $p^h(t) = p_i^h$, $\tau_i \leq t < \tau_{i+1}$, подается на вход системы M_2 , управление $v^*(t) = v_i^*$, $\tau_i \leq t < \tau_{i+1}$, — на вход системы M_3 , а управление $u^h(t) = u_i^h$, $\tau_i \leq t < \tau_{i+1}$ — на вход системы S . В результате действия этих управлений, а также неизвестного управления оппонента $v(t)$, $\tau_i \leq t \leq \tau_{i+1}$, в момент τ_{i+1} реализуются состояния $x(\tau_{i+1})$, $w(\tau_{i+1})$ и $w_1(\tau_{i+1})$. Процедура заканчивается в момент ϑ .

Пусть критерий качества имеет вид

$$I(x(\cdot; t_0, x_0, u_T(\cdot), v_T(\cdot))) = \int_{t_0}^{\vartheta} \int_{\Omega} f(t, \eta, x(t, \eta), \nabla x(t, \eta)) d\eta dt.$$

Здесь ∇x означает градиент функции x ; функция $f(t, \eta, x, y)$ удовлетворяет условию Каратеодори, т.е. $f(t, \eta, x, y)$ измерима по Лебегу по $(t, \eta) \in T \times \Omega$ для любых $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$, и липшицева по $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$ для почти всех $t, \eta \in T \times \Omega$. Кроме того, $|f(t, \eta, 0, \dots, 0)| \leq c_0(t, \eta)$ для почти всех $t, \eta \in T \times \Omega$ и $c_0(t, \eta) \in L_\infty(T \times \Omega)$.

Задача 1. Необходимо указать уравнения систем M_1 и M_2 , управление $u^*(\cdot)$ системой M_1 , позиционную стратегию партнера $\mathcal{U} : T \times \mathcal{H} \rightarrow P$, позиционную стратегию реконструкции $\mathcal{V}_1 : T \times H \rightarrow H$ и число c_1 со свойствами: каково бы ни было $\varepsilon > 0$ можно указать числа $h_* > 0$ и $\delta_* > 0$ такие, что выполняется неравенства

$$I(x_{\Delta, w}^h(\cdot)) \leq c_1 + \varepsilon \quad \forall x_{\Delta, w}^h(\cdot) \in X_h(t_0, x_0, \mathcal{U}, \mathcal{V}_1, \Delta, w)$$

равномерно относительно всех измерений ξ_i^h со свойствами (5), если $h \leq h_*$ и диаметр $\delta = \delta(\Delta) \leq \delta_*$.

Задача, стоящая перед оппонентом противоположна задаче, стоящей перед партнером. Ее суть состоит в следующем.

Задача 2. Необходимо указать уравнения M_3 и M_2 , позиционную стратегию оппонента $\mathcal{V} : T \times \mathcal{H} \rightarrow E$, позиционную стратегию $\mathcal{V}_2 : T \times \mathcal{H} \rightarrow E$ для системы M_3 , позиционную стратегию реконструкции $\mathcal{V}_1 : T \times H \rightarrow H$ со следующими свойствами: каково бы ни было число $\varepsilon > 0$ можно указать числа $h_* > 0$ и $\delta_* > 0$ такие, что неравенства

$$I(x_{\Delta,z}^h(\cdot)) \geq c_1 - \varepsilon \quad \forall x_{\Delta,z}^h(\cdot) \in X_h(t_0, x_0, \mathcal{V}, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \Delta)$$

выполняются равномерно относительно всех измерений ξ_i^h со свойствами (5), если $h \leq h_*$ и диаметр $\delta = \delta(\Delta) \leq \delta_*$.

Символ $X_h(t_0, x_0, \mathcal{U}, \mathcal{V}_1, \Delta, w)$ означает пучок всех решений системы (1)–(4), порожденных стратегиями \mathcal{U} , \mathcal{V}_1 и разбиением Δ , а символ $X_h(t_0, x_0, \mathcal{V}, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \Delta)$ — пучок решений, порожденных стратегиями \mathcal{V} , \mathcal{V}_1 , \mathcal{V}_2 и разбиением Δ .

3. Алгоритм решения задачи 1. Будем полагать, что выполнено следующее условие.
У с л о в и е 1. Существует выпуклое и замкнутое множество $D \subset H$ такое, что $BP = CE + D$.

Здесь $BP = \{Bu : u \in P\}$, $CE = \{Cv : v \in E\}$, $CE + D = \{u : u = u_1 + u_2, u_1 \in CE, u_2 \in D\}$.

Пусть $u^*(\cdot)$ оптимальное программное управление минимизирующее функционал $I(w(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)))$ на множестве $D_T(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(T; H) : u(t) \in D \text{ for a. a. } t \in T\}$, а C_{opt} — соответствующее $u = u^*(\cdot)$ значение функционала I .

Символ $w(\cdot) = \{w^{(1)}(\cdot), w^{(2)}(\cdot)\} = w(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$, $(u(\cdot) \in D_T(\cdot))$, означает решение системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} w^{(1)} + l \frac{\partial}{\partial t} w^{(2)} &= \Delta_L w^{(1)} + u \quad \text{в } \Omega \times (t_0, \vartheta], \\ \frac{\partial}{\partial t} w^{(2)} &= \Delta_L w^{(2)} + g(w^{(2)}) + w^{(1)} \end{aligned} \quad (8)$$

с граничными $\frac{\partial}{\partial n} w^{(1)} = \frac{\partial}{\partial n} w^{(2)} = 0$ на $\partial\Omega \times (t_0, \vartheta]$ и начальным $w^{(1)}(t_0) = \psi_0$, $w^{(2)}(t_0) = \varphi_0$ в Ω условиями.

В качестве системы M_1 возьмем систему (8) с управлением $u(\cdot) = u^*(\cdot)$, а в качестве системы M_2 — уравнение

$$\frac{\partial w_1(t, \eta)}{\partial t} = \Delta_L w_1(t, \eta) + p^h(t, \eta) + g(w_1(t, \eta)) \quad \text{в } \Omega \times (t_0, \vartheta] \quad (9)$$

с граничным $\frac{\partial w_1}{\partial n} = 0$ на $\partial\Omega \times (t_0, \vartheta]$ и начальным $w_1(t_0) = \varphi_0$ в Ω условиями. Стратегии \mathcal{U} и \mathcal{V}_1 (см., (6)) зададим следующим образом:

$$\mathcal{U}(t, \xi, p, w) = \arg \max \{L(u, y) : u \in P\}, \quad (10)$$

$$\mathcal{V}_1(t, \xi, w_1) = \arg \min \{l(t, \alpha, u, s) : u \in U_d\}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} w &= \{w^{(1)}, w^{(2)}\}, \quad L(u, y) = (y, Bu)_H, \quad y = w^{(1)} - p + l(w^{(2)} - \xi), \\ l(t, \alpha, u, s) &= \exp(-2\varrho t)(s, u)_H + \alpha |u|_H^2, \quad s = w_1 - \xi, \\ \varrho &= \text{vrai} \max_{(t, \eta) \in T \times \Omega} \{a(t, \eta) + b^2(t, \eta)\} < +\infty, \quad U_d = \{u \in H : |u|_H \leq d\}, \end{aligned}$$

$$d = \text{const} > \sup \{|x(t)|_H : x(\cdot) \in X_h(t_0, x_0, \mathcal{U}, \mathcal{V}_1, \Delta, w), t \in T\}.$$

Т е о р е м а 1. Пусть $c_1 = C_{\text{opt}}$, а системы M_1 и M_2 задаются соотношениями (8) и (9) соответственно. Тогда стратегии \mathcal{U} and \mathcal{V}_1 вида (10), (11) решают задачу 1.

4. Алгоритм решения задачи 2. Пусть как и выше выполнено условие 1. В качестве системы M_3 возьмем систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} z^{(1)} + l \frac{\partial}{\partial t} z^{(2)} &= \Delta_L z^{(1)} + v^* \quad \text{в } \Omega \times (t_0, \vartheta], \\ \frac{\partial}{\partial t} z^{(2)} &= \Delta_L z^{(2)} + g(z^{(2)}) + z^{(1)} \end{aligned} \quad (12)$$

с граничными $\frac{\partial}{\partial n} z^{(1)} = \frac{\partial}{\partial n} z^{(2)} = 0$ на $\partial\Omega \times (t_0, \vartheta]$ и начальным $z^{(1)}(t_0) = \psi_0$, $z^{(2)}(t_0) = \varphi_0$ в Ω условиями. Система M_2 описывается соотношением (9). Стратегии \mathcal{V} , \mathcal{V}_1 и \mathcal{V}_2 (см. (7)) зададим следующим образом:

$$\mathcal{V}(t, \xi, p, z) = \arg \max\{L_1(v, \chi) : v \in E\}, \quad (13)$$

$$\mathcal{V}_1(t, \xi, w_1) = \arg \min\{l(t, \alpha, u, s) : u \in U_d\}, \quad (14)$$

$$\mathcal{V}_2(t, \xi, p, z) = B\tilde{u} - C\tilde{v}, \quad (15)$$

где

$$\tilde{u} \in \arg \min\{L(u, \chi) : u \in P\},$$

$$L_1(v, \chi) = (\chi, Cv)_H, \quad \chi = z^{(1)} - p + l(z^{(2)} - \xi),$$

$$z = \{z^{(1)}, z^{(2)}\}, \quad L(u, \chi) = (\chi, Bu)_H,$$

$\tilde{v} = \tilde{v}(\tilde{u})$ произвольный элемент из множества E со свойством $B\tilde{u} - C\tilde{v} \in D$.

Т е о р е м а 1. Пусть $c_1 = C_{\text{opt}}$ системы M_3 и M_2 задаются соотношениями (12) и (9) соответственно. Тогда стратегии \mathcal{V} , \mathcal{V}_1 и \mathcal{V}_2 вида (13)–(15) решают задачу 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Caginalp G. An analysis of a phase field model of a free boundary // Arch. Rat. Mech. Analysis. 1986. V. 92. P. 205–245.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 474 с.
3. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
4. Осипов Ю.С. Избранные труды. М.: МГУ, 2009. 654 с.
5. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problems of ordinary differential equations: dynamical solution. London: Gordon and Breach, 1995. 874 p.
6. Maksimov, V.I. Dynamical Inverse Problems of Distributed Systems. Boston: VSP, 2002. 270 p.
7. Maksimov V., Troltsch F. Dynamical state and control reconstruction for a phase field model // Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems. A: Mathematical analysis. 2006. V. 13. № 3-4. P. 419–444.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантами РФФ (проект 13-02-00264) и РФФИ (проект 13-01-12446-офи- М2).

Поступила в редакцию 24 апреля 2015 г.

Maksimov V.I. ON GUARANTEED CONTROL UNDER MEASURING A PART OF COORDINATES

The paper is devoted to a problem of game control of a nonlinear distributed system. The goal of this note is in describing stable algorithms of its solution. The suggested algorithms are based on the constructions of the dynamical inversion theory and the extremal shift method.

Key words: feedback control; extremal shift method.

Максимов Вячеслав Иванович, Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом дифференциальных уравнений, e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Maksimov Vyacheslav Ivanovich, Institute for Mathematics and Mechanics of the Ural branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, the Head of the Differential Equations Department, e-mail: maksimov@imm.uran.ru

УДК 517.929

ОДИН ВАРИАНТ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© В.П. Максимов

Ключевые слова: линейные функционально-дифференциальные системы; задачи управления; оптимальное управление.

Для линейной функционально-дифференциальной системы с последействием общего вида, рассматривается задача оптимального управления с линейным целевым функционалом. На основе использования матрицы Коши выводится необходимое и достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума. Дано явное представление аналога функции Гамильтона–Понтрягина для общего случая, охватывающего задачи с нелокальным оператором, реализующим управляющие воздействия.

Здесь мы следуем обозначениям и основным положениям теории функционально-дифференциальных уравнений в части линейных систем с последействием [1-3]. Обозначим через $L^n = L^n[0, T]$ пространство суммируемых по Лебегу на конечном промежутке $[0, T]$ функций $z : [0, T] \rightarrow R^n$ с нормой $\|z\|_{L^n} = \int_0^T |z(t)|_n dt$, где $|\cdot|_n$ – норма в R^n (далее, если размерность пространства очевидна, индекс у нормы будем опускать). Обозначим через $AC^n = AC^n[0, T]$ пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0, T] \rightarrow R^n$ с нормой $\|x\|_{AC^n} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_{L^n}$.

Для описания системы управления введем линейный оператор \mathcal{L} :

$$(\mathcal{L}x)(t) = \dot{x}(t) - \int_0^t K(t, s)\dot{x}(s) ds - A(t)x(0), \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

Здесь элементы $k_{ij}(t, s)$ ядра $K(t, s)$ измеримы на множестве $\{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$ и таковы, что на этом множестве $|k_{ij}(t, s)| \leq \kappa(t)$, $i, j = 1, \dots, n$, где функция κ суммируема на $[0, T]$, элементы $(n \times n)$ -матрицы $A(t)$ суммируемы на $[0, T]$. Оператор $\mathcal{L} : AC^n \rightarrow L^n$ ограничен. Функционально-дифференциальная система $\mathcal{L}y = f$ охватывает дифференциальные уравнения с сосредоточенным и/или распределенным запаздыванием и интегро-дифференциальные системы Вольтерра (см., например, [4]). В частности, для оператора $(\mathcal{L}x)(t) = \dot{x}(t) - \int_0^t d_s R(t, s)x(s)$ с распределенным запаздыванием, где без ограничения общности можно считать $R(t, t) = 0$, имеем $K(t, s) = R(t, s)$, $A(t) = R(t, 0)$.

При сделанных предположениях линейный оператор $Q : L^n \rightarrow L^n$, $(Qz)(t) = z(t) - \int_0^t K(t, s)z(s) ds$ имеет ограниченный обратный $(Q^{-1}f)(t) = f(t) + \int_0^t \mathcal{R}(t, s)f(s) ds$, где $\mathcal{R}(t, s)$ – резольвентное ядро, соответствующее ядру $K(t, s)$. Матрица $C(t, s) = E + \int_s^t \mathcal{R}(\xi, s) d\xi$, где E – единичная $(n \times n)$ -матрица, называется матрицей Коши [5, 6]. Свойства матрицы Коши, используемые ниже, подробно исследованы в [6]. Отметим здесь только два соотношения, связывающих матрицу Коши с ядром $K(t, s)$:

$$C(t, s) = \int_s^t C(t, \tau)K(\tau, s) d\tau + E, \quad C'_t(t, s) = \int_s^t C'_t(t, \tau)K(\tau, s) d\tau + K(t, s).$$