УДК 517.988.5, 517.911.5
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-501-507

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ ВОЛЬТЕРРЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© Е. О. Бурлаков[1)], Е. С. Жуковский[2),3)]

[1)] Норвежский университет естественных наук,
1432, Норвегия, Ос, ул. Университетская, 33
E-mail: eb_@bk.ru
[2)] Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина,
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
[3)] Российский университет дружбы народов,
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: zukovskys@mail.ru

Получены условия разрешимости и непрерывной зависимости от параметра решений операторных включений с абстрактными вольтерровыми отображениями. Результаты применены к исследованию задачи Коши для функционально-дифференциального включения с отклоняющимся аргументом.
Ключевые слова: операторные включения Вольтерры; функционально-дифференциальные включения; включения с отклоняющимся аргументом; существование решений; непрерывная зависимость от параметров

1. Введение

Многие реальные явления и процессы обладают тем свойством, что их текущее состояние зависит только от "прошлого" и "настоящего", но не от "будущего". Динамика таких систем описывается при помощи операторов Вольтерры. По-видимому, впервые свойство вольтерровости оператора было сформулировано А.Н. Тихоновым [1]: "Функциональный оператор $V(t,\varphi)$ мы будем называть функциональным оператором типа Volterra, если его величина определена значениями функции $\varphi(\tau)$ в промежутке $0 \le \tau < t$." Наиболее известным и изученным типом операторов Вольтерры являются интегральные операторы. Также, наряду с классическим определением А.Н. Тихонова, существует ряд его обобщений (см. [2] и библиографию этой работы).

Возвращаясь к проблеме математического описания реальных явлений и процессов, следует отметить, что важным свойством математической модели, обусловливающим ее применимость, является корректность модели, т. е. однозначная разрешимость соответствующих моделирующих уравнений и непрерывная зависимость решения от параметров модели. В общей постановке вопросы корректности математических моделей на основе уравнений с операторами, обладающими свойством вольтерровости в смысле А.Н. Тихонова и в его абстрактной трактовке, были исследованы в работах [3] и [2], соответственно. Такая общая постановка задач позволила применить полученные результаты, например, к функционально-дифференциальным уравнениям и управляемым системам. Для функционально-дифференциальных включений, содержащих многозначные вольтерровые по А.Н. Тихонову отображения, вопросы разрешимости и непрерывной зависимости множества решений от параметров были рассмотрены в [4] и [5].

В настоящей работе мы сформулируем теоремы о разрешимости абстрактных включений Вольтерры и непрерывной зависимости множества решений от параметров. Аналогичные утверждения будут приведены для функционально-дифференциального включения с отклоняющимся аргументом.

2. Разрешимость абстрактных включений Volterra и непрерывная зависимость решений от параметра

Обозначим R^m – m-мерное вещественное векторное пространство с нормой $|\cdot|$. Пусть W и Λ – некоторые метрические пространства с метриками ρ_W и ρ_Λ, соответственно; $B_W(w,r)$ – открытый шар радиуса r в точке $w\in W$. Для произвольного метрического пространства M обозначим $\mathrm{Cl}(M)$ – множество всех замкнутых подмножеств M.

Пусть в W определено отношение эквивалентности $\sim$. Для любых двух классов эквивалентности $\overline{w}^1$, $\overline{w}^2$ положим

$$d(\overline{w}^1,\overline{w}^2)=\inf_{w^1\in\overline{w}^1,\ w^2\in\overline{w}^2}\rho(w^1,w^2). \tag{2.1}$$

Будем предполагать выполнение следующих условий: для всякого $w\in W$ класс эквивалентности $\overline{w}$ замкнут; для любых классов $\overline{w}^1,\overline{w}^2\in W/\sim$ и для всякого представителя $w^1\in\overline{w}^1$ существует такой элемент $w^2\in\overline{w}^2$, что имеет место неравенство $d(\overline{w}^1,\overline{w}^2)\geq\rho(w^1,w^2)-\varepsilon$. Тогда (2.1) определяет метрику в $W/\sim$, причем полнота пространства W влечет за собой полноту фактор-пространства $W/\sim$ (см. [6]).

Поставим в соответствие каждому $\gamma\in[0,1]$ некоторое отношение эквивалентности $\upsilon(\gamma)$. Предположим, что совокупность $\upsilon=\{\upsilon(\gamma),\gamma\in[0,1]\}$ рассматриваемых отношений удовлетворяет условиям:

v_0) значению $\gamma=0$ соответствует отношение $\upsilon(0)=W^2$ (т.е. любые два элемента являются $\upsilon(0)$-эквивалентными);

v_1) значению $\gamma=1$ соответствует отношение равенства (т.е. никакие два разных элемента не вступают в отношение $\upsilon(1)$);

v) если $\gamma_1>\gamma_2$, то $\upsilon(\gamma_1)\subseteq\upsilon(\gamma_2)$ (любые два $\upsilon(\gamma_1)$-эквивалентных элемента будут $\upsilon(\gamma_2)$-эквивалентными, если $\gamma_1>\gamma_2$).

О п р е д е л е н и е 2. 1. Многозначное отображение $\Psi:W\to\mathrm{Cl}(W)$ будем называть *вольтерровым на системе* υ *отношений эквивалентности* (вольтерровым на υ), если для каждого $\gamma\in[0,1]$ и любых $w^1,w^2\in W$ из $(w^1,w^2)\in\upsilon(\gamma)$ следует $(\hat{w}^1,\hat{w}^2)\in\upsilon(\gamma)$ при всех $(\hat{w}^1,\hat{w}^2)\in\Psi w^1\times\Psi w^2$. Таким образом, вольтерровое отображение сохраняет отношение эквивалентности при любом $\gamma\in[0,1]$, отображая эквивалентные элементы множества W в эквивалентные множества (то есть подмножества одного и того же класса эквивалентности).

Определение 2.1 естественным образом обобщает понятие вольтеррового по А.Н. Тихонову отображения (см. [1]).

Всюду ниже будем предполагать, что (W,ρ_W) – полное метрическое пространство с заданной на нем системой υ отношений эквивалентности, удовлетворяющей условиям $\mathrm{v}_0),\mathrm{v}_1),\mathrm{v}$). Также предположим, что для любых $\gamma\in(0,1)$ и $w\in W$ соответствующий класс $\upsilon(\gamma)$-эквивалентности $\overline{w}_\gamma$ замкнут и фактор-множество $W/\upsilon(\gamma)$ является полным метрическим пространством с расстоянием

$$d_{W/\upsilon(\gamma)}(\overline{w}^1_\gamma,\overline{w}^2_\gamma)=\inf_{w^1\in\overline{w}^1_\gamma,\ w^2\in\overline{w}^2_\gamma}\rho_W(w^1,w^2).$$

Рассмотрим следующее включение

$$w \in \Psi w, \tag{2.1}$$

где $\Psi : W \to \mathrm{Cl}(W)$ – вольтерровое на семействе υ многозначное отображение.

Для любого $\gamma \in (0,1)$ определим каноническую проекцию $\Pi_\gamma : W \to W/\upsilon(\gamma)$ как отображение, ставящее каждому $w \in W$ его класс эквивалентности $\overline{w}_\gamma$. Для многозначного вольтеррова на семействе υ отображения $\Psi : W \to \mathrm{Cl}(W)$ определим многозначное отображение $\Psi_\gamma : W/\upsilon(\gamma) \to \mathrm{Cl}(W/\upsilon(\gamma))$ следующим образом: $\Psi_\gamma \overline{w}_\gamma = \{\Pi_\gamma \mathrm{w}, \mathrm{w} \in \Psi w\}$, где w – произвольный элемент $\overline{w}_\gamma$.

О п р е д е л е н и е 2. 2. Будем называть γ*-локальным решением* включения (2.1), $\gamma \in (0,1)$, класс эквивалентности $\overline{w}_\gamma \in W/\upsilon(\gamma)$, удовлетворяющий включению $\overline{w}_\gamma \in \Psi_\gamma \overline{w}_\gamma$. Отождествляя элемент w, удовлетворяющий (2.1), с его классом $\upsilon(1)$-эквивалентности $\overline{w}$, будем считать его *глобальным решением* (1*-локальным решением*) включения (2.1). Если $\overline{w}_\eta$ и $\overline{w}_\xi$ – η- и ξ-локальные решения включения (2.1), $0 < \xi < \eta \le 1$, удовлетворяющие соотношению $\overline{w}_\xi \subseteq \overline{w}_\eta$, то будем называть $\overline{w}_\eta$ сужением решения $\overline{w}_\xi$, а $\overline{w}_\xi$ – продолжением решения $\overline{w}_\eta$. Назовем γ*-предельно продолженным* решением включения (2.1), $\gamma \in (0,1]$, отображение $\overline{w}_{\gamma)}$, которое ставит в соответствие всякому $\xi \in (0,\gamma)$ ξ-локальное решение $\overline{w}_\xi$ и удовлетворяет следующим двум условиям:

- для любых η, ξ, $0 < \eta < \xi < \gamma$, выполнено $\overline{w}_\xi \subseteq \overline{w}_\eta$;
- для произвольного $w^0 \in W$ выполнено $\lim\limits_{\xi \to \gamma - 0} d(w_\xi, w_\xi^0) = \infty$.

В этом случае γ-предельно продолженное решение $\overline{w}_{\gamma)}$ назовем продолжением $\overline{w}_\xi$, а класс $\overline{w}_\xi$ – сужением $\overline{w}_{\gamma)}$.

Обозначим через $\mathrm{h}_{W/\upsilon(\gamma)}$ метрику Хаусдорфа в $\mathrm{Cl}(W/\upsilon(\gamma))$, порожденную расстоянием $d_{W/\upsilon(\gamma)}$.

О п р е д е л е н и е 2. 3. Вольтерровое на системе υ многозначное отображение $\Psi : W \to \to \mathrm{Cl}(W)$ назовем *локально сжимающим на системе* υ, если существуют элемент $w^0 \in W$ и число $q < 1$, такие что для любого $r > 0$ найдется $\delta > 0$, при котором выполнены условия:

- для произвольных $\overline{w}_\delta^1, \overline{w}_\delta^2 \in B_{W/\upsilon(\delta)}(\overline{w}_\delta^0, r)$ $(\overline{w}_\delta^0 \in \Pi_\delta w^0)$ выполнено

$$\mathrm{h}_{W/\upsilon(\delta)}(\Psi_\delta \overline{w}_\delta^1, \Psi_\delta \overline{w}_\delta^2) \le q d_{W/\upsilon(\delta)}(\overline{w}_\delta^1, \overline{w}_\delta^2);$$

- для произвольных $\gamma \in (0,1)$, $\overline{w}_{\gamma+\delta}^1, \overline{w}_{\gamma+\delta}^2 \in B_{W/\upsilon(\gamma+\delta)}(\overline{w}_{\gamma+\delta}^0, r)$ $(\overline{w}_{\gamma+\delta}^0 \in \Pi_{\gamma+\delta} w^0)$ таких, что $(\overline{w}_{\gamma+\delta}^1, \overline{w}_{\gamma+\delta}^2) \in \upsilon(\gamma)$, справедливо

$$\mathrm{h}_{W/\upsilon(\gamma+\delta)}(\Psi_{\gamma+\delta} \overline{w}_{\gamma+\delta}^1, \Psi_{\gamma+\delta} \overline{w}_{\gamma+\delta}^2) \le q d_{W/\upsilon(\gamma+\delta)}(\overline{w}_{\gamma+\delta}^1, \overline{w}_{\gamma+\delta}^2).$$

Т е о р е м а 2. 1. *Пусть многозначое отображение* Ψ *является вольтерровым на системе* υ *и локально сжимающим на этой системе.*

Тогда включение (2.1) *локально разрешимо и всякое его локальное решение продолжаемо до глобального или предельно продолженного решения.*

Рассмотрим теперь следующее включение

$$w \in F(w, \lambda), \tag{2.2}$$

содержащее параметр $\lambda \in \Lambda$. Предположим, что для всякого $\lambda \in \Lambda$ многозначное отображение $F(\cdot,\lambda): W \to \mathrm{Cl}(W)$ вольтеррово на семействе υ.

При каждом $\lambda \in \Lambda$ определим понятия локального, глобального и предельно продолженного решений включения (2.2) в соответствии с определением 2.2.

О п р е д е л е н и е 2. 4. Вольтерровы отображения $F(\cdot,\lambda): W \to \mathrm{Cl}(W)$, $\lambda \in \Lambda$, назовем *в совокупности локально сжимающими* на семействе отношений эквивалентности υ, если при любом $\lambda \in \Lambda$ отображение $F(\cdot,\lambda): W \to \mathrm{Cl}(W)$ является локально сжимающим на υ с константами q и $\delta(r)$, не зависящими от $\lambda \in \Lambda$.

Для любых $\gamma \in (0,1)$, $\lambda \in \Lambda$ обозначим через $\mathbb{S}_\gamma(\lambda)$ и $\mathbb{S}(\lambda)$ множества γ-локальных решений и глобальных решений включения (2.2), соответственно.

Т е о р е м а 2. 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *многозначные отображения $F(\cdot,\lambda): W \to \mathrm{Cl}(W)$, $\lambda \in \Lambda$ в совокупности локально сжимающие на семействе υ;*

2) *многозначное отображение $F: W \times \Lambda \to \mathrm{Cl}(W)$ полунепрерывно снизу (в метрике Хаусдорфа) в точке (w,λ_0) равномерно по всем $w \in W$.*

Тогда при каждом $\lambda \in \Lambda$ включение (2.2) локально разрешимо и всякое его локальное решение продолжаемо до глобального или предельно продолженного решения.

Если включение (2.2) имеет глобальное решение $\overline{w}_0 = w_0$ при $\lambda = \lambda_0$, тогда для любого λ, достаточно близкого к λ_0, оно также имеет глобальное решение $w = w(\lambda)$, множество $\mathbb{S}(\lambda)$ замкнуто и многозначное отображение $\lambda \mapsto \mathbb{S}(\lambda)$ полунепрерывно снизу в точке λ_0.

Если включение (2.2) имеет предельно продолженное решение $\overline{w}_{0\zeta)}$ при $\lambda = \lambda_0$, тогда при любом $\gamma \in (0,\zeta)$ найдется такая окрестность λ_0, что при всяком λ из этой окрестности включение (2.2) имеет локальное решение $\overline{w}_\gamma = \overline{w}_\gamma(\lambda)$, множество $\mathbb{S}_\gamma(\lambda)$ замкнуто и многозначное отображение $\lambda \mapsto \mathbb{S}_\gamma(\lambda)$ полунепрерывно снизу в точке λ_0.

3. Разрешимость задачи Коши для дифференциального включения с отклоняющимся аргументом и непрерывная зависимость решений от параметра

Будем использовать следующие обозначения: μ – мера Лебега на прямой R; $L([a,b],\mu,R^n)$– пространство измеримых суммируемых функций $y\colon [a,b] \to R^n$ с нормой $\|y\|_L = \int\limits_a^b |y(s)|ds$; $L_\infty([a,b],\mu,R^n)$ – пространство измеримых существенно ограниченных функций $y: [a,b] \to R^n$ с нормой $\|y\|_{L_\infty} = \operatorname*{vrai\,sup}\limits_{t\in[a,b]} |y(t)|$; $AC([a,b],\mu,R^n)$ – пространство таких абсолютно непрерывных функций $x\colon [a,b] \to R^n$, что $\dot{x} \in L([a,b],\mu,R^n)$, с нормой $\|x\|_{AC} = |x(a)| + \|\dot{x}\|_L$.

Рассматривается задача Коши для дифференциального включения с отклоняющимся аргументом

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(h(t,\lambda)),\lambda),\ t \in [-T,T],\ \lambda \in \Lambda \tag{3.1}$$

$$x(0) = x_0(\lambda). \tag{3.2}$$

Здесь $x_0: \Lambda) \in R^n$, при каждом $\lambda \in \Lambda$ функция $h(\cdot,\lambda): [-T,T] \to [-T,T]$ измерима, причем для всякого $t \in [-T,T]$ выполнено $|h(t,\lambda)| \leq |t|$. Будем предполагать, что при каждом $\lambda \in \Lambda$ многозначное отображение $F(\cdot,\cdot,\lambda): [-T,T] \times R^n \to \mathrm{Cl}(R^n)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, т. е.

k_1) для всех фиксированных $x \in R^n$ многозначное отображение $F(\cdot,x,\lambda): [-T,T] \to \mathrm{Cl}(R^n)$ измеримо;

k_2) для почти всех фиксированных $t \in [-T,T]$ многозначное отображение $F(t,\cdot,\lambda): R^n \to$ $\to \mathrm{Cl}(R^n)$ непрерывно;

k_3) для любого числа $r>0$ существует такая суммируемая функция $g_r \in L([-T,T],\mu,R)$, что для всех $x \in R^n$, удовлетворяющих условию $|x| \leqslant r$, выполнено

$$\mathrm{h}_{R^n}(F(t,x,\lambda),\{0\}) \leqslant g_r(t)$$

при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $\lambda \in \Lambda$.

О п р е д е л е н и е 3. 1. Пусть $\gamma \in (0,T)$, $\zeta \in (0,T]$. Будем называть *локальным решением* задачи (3.1), (3.2), определенным на $[-\gamma,\gamma]$, функцию $x_\gamma \in AC([-\gamma,\gamma],\mu,R^n)$, удовлетворяющую включению (3.1) на $[-\gamma,\gamma]$ и начальному условию (3.2). Элемент $x \in AC([-T,T],\mu,R^n)$, удовлетворяющий задаче (3.1), (3.2) на всем $[-T,T]$, будем считать *глобальным решением* данной задачи. *Предельно продолженным* решением задачи (3.1), (3.2) назовем функцию $x_\zeta : (-\zeta,\zeta) \to R^n$, удовлетворяющую следующим двум условиям:

- для всякого $\xi \in (0,\zeta)$ сужение x_ξ функции x_ζ является локальным решением (3.1), (3.2), определенным на $[-\xi,\xi]$;
- $\lim\limits_{\xi \to \zeta - 0} \int\limits_{-\xi}^{\xi} |\dot{x}_\xi(t)| dt = \infty$.

Зафиксируем некоторый элемент $\lambda_0 \in \Lambda$. Для произвольного $\delta > 0$ обозначим

$$\Theta(\delta) = \{t \in [-T,T],\ |t| - |h(t,\lambda_0)| < \delta\}.$$

Отметим, что в силу измеримости функции $h(\cdot,\lambda) : [-T,T] \to [-T,T]$ ($\lambda \in \Lambda$), множество $\Theta(\delta)$ измеримо.

Для всех $\gamma \in (0,T)$, $\lambda \in \Lambda$ обозначим через $\mathbf{S}_\gamma(\lambda)$ и $\mathbf{S}(\lambda)$ множества локальных решений, определенных на $[-\gamma,\gamma]$, и глобальных решений задачи (3.1), (3.2), соответственно.

Т е о р е м а 3. 1. *Пусть*

1) *существует* $\widehat{\delta} > 0$, *для которого при любом* $r > 0$ *найдется такая функция* $l \in L([-T,T],\mu,R)$, *что при почти всех* $t \in \Theta(\widehat{\delta})$, *при любых* $x_1, x_2 \in R^n$, *удовлетворяющих неравенствам* $|x_1| \leq r$, $|x_2| \leq r$, *при каждом* $\lambda \in \Lambda$ *выполнено*

$$\mathrm{h}_{R^n}(F(t,x_1,\lambda),F(t,x_2,\lambda)) \leq l(t)|x_1 - x_2|.$$

Также предполагаем, что при $\lambda \to \lambda_0$ *имеют место сходимости*:

2) $h(\cdot,\lambda) \to h(\cdot,\lambda_0)$ *по мере на* $[-T,T]$;

3) $x_0(\lambda) \to x_0(\lambda_0)$;

4) $\mathrm{h}_{R^n}(F(\cdot,x,\lambda),F(\cdot,x,\lambda_0)) \to 0$ *по мере на* $\Theta(\widehat{\delta})$ *для любого* $x \in R^n$;

5) *для любой функции* $x(\cdot) \in L_\infty([-T,T],\mu,R^n)$ *и произвольной последовательности* $\{x_i(\cdot)\} \in L_\infty([-T,T],\mu,R^n)$, *сходящейся по мере на* $[-T,T]$ *к* $x(\cdot)$, *имеет место сходимость*

$$\mathrm{h}_{R^n}(F(\cdot,x_i(\cdot),\lambda),F(\cdot,x(\cdot),\lambda_0)) \to 0$$

по мере на $[-T,T] \setminus \Theta(\widehat{\delta})$ *при* $i \to \infty$.

Тогда при каждом $\lambda \in \Lambda$ *задача (3.1), (3.2) локально разрешима, всякое локальное решение продолжаемо до глобального или предельно продолженного решения. Если задача (3.1), (3.2) имеет глобальное решение* $x(\lambda_0)$ *при* $\lambda = \lambda_0$, *то в некоторой окрестности* λ_0 *задача (3.1), (3.2) также имеет глобальное решение* $x(\lambda)$, *множество* $\mathbf{S}(\lambda)$ *замкнуто и многозначное отображение* $\lambda \mapsto \mathbf{S}(\lambda)$ *полунепрерывно снизу в точке* λ_0.

Если задача (3.1), (3.2) имеет предельно продолженное решение $x_{0\zeta}$ *при* $\lambda = \lambda_0$, *тогда при любом* $\gamma \in (0,\zeta)$ *найдется такая окрестность* λ_0, *что при всяком* λ *из этой окрестности задача (3.1), (3.2) имеет локальное решение* $x_\gamma = x_\gamma(\lambda)$ *множество* $\mathbf{S}_\gamma(\lambda)$ *замкнуто и многозначное отображение* $\lambda \mapsto \mathbf{S}_\gamma(\lambda)$ *полунепрерывно снизу в точке* λ_0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н.* О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики. // Бюл. Моск. ун-та. Секц. А. 1938. № 8. Т. 1. С. 1–25.

2. *Жуковский Е.С.* Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтера // Математический сборник. 2006. Т. 197. № 10. С. 33–56.

3. *Бурлаков Е.О., Жуковский Е.С.* Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра с локально сжимающими операторами // Известия высших учебных заведений. Математика. 2010. № 8. С. 16–29.

4. *Булгаков А.И., Малютина Е.В., Филиппова О.В.* Априорная ограниченность и непрерывная зависимость от параметров множества фазовых траекторий управляемой импульсной системы с фазовыми ограничениями по управлению // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. Вып. 1. С. 38–42.

5. *Булгаков А.И., Малютина Е.В., Филиппова О.В.* Дифференциальное включение с запаздыванием, зависящим от параметров // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2012. Т. 17. Вып. 1. С. 28–31.

6. *Жуковский Е.С.* Обобщенно вольтерровые операторы в метрических пространствах // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 3. С. 501–508.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-31-50037, № 17-41-680975), Минобрнауки России (Соглашение № 02.a03.21.0008) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ, № НШ-8215.2016.1.

Поступила в редакцию 10 января 2017 г

Бурлаков Евгений Олегович, Норвежский университет естественных наук, Норвегия, Ос, аспирант, e-mail: eb_@bk.ru

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики; Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: zukovskys@mail.ru

UDC 517.988.5, 517.911.5
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-501-507

ON VOLTERRA OPERATOR INCLUSIONS AND DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH DEVIATING ARGUMENT

© **E. O. Burlakov[1], E. S. Zhukovskiy[2),3)]**

[1)] Norwegian University of Life Sciences,
3 Universitetetstunet, Ås, Norway, 1432
E-mail: eb_@bk.ru
[2)] Tambov State University named after G.R. Derzhavin,
33 Internatsionalnaya st., Tambov, Russian Federation, 392000
[3)] RUDN University
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: zukovskys@mail.ru

We obtained conditions for solvability of operator inclusions with abstract Volterra operators and continuous dependence of the solutions on a parameter. These results were implemented to investigation of a Cauchy problem for a functional-differential inclusion with deviating argument.

Key words: Volterra operator inclusions; functional-differential inclusions; inclusions with deviating argument; existence of solutions; continuous dependence on parameters

REFERENCES

1. *Tikhonov A.N.* O funkcional'nykh uravneniyah tipa Volterra i ih primeneniyah k nekotorym zadacham matematicheskoi fiziki // Bull. Moscow University. Section A. 1938. № 8. V. 1. P. 1–25.

2. *Zhukovskiy E.S.* Nepreryvnaya zavisimost' ot parametrov resheniy uravneniy Volterra // Sbornik Mathematics. 2006. V. 197. № 10. P. 33–56.

3. *Burlakov E.O., Zhukovskiy E.S.* Nepreryvnaya zavisimost' ot parametrov resheniy uravneniy Volterra s lokal'no szhimayushimi operatorami // Izvestija VUZov. Matematika. 2010. № 8. P. 16–29.

4. *Bulgakov A.I., Malyutina E.V., Filippova O.V.* Apriornaya ogranichennost' i nepreryvnaya zavisimost' ot parametrov mnozhestva fazovykh traektoriy upravlyaemoy sistemy s fazovymi ogranicheniyami po upravleniyu // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2011. V. 16. Iss. 1. P. 38–42.

5. *Bulgakov A.I., Malyutina E.V., Filippova O.V.* Differentsial'noe vklyuchenie s zapazdyvaniem, zavisyashim ot parametrov // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2012. V. 17. Iss. 1. P. 28–31.

6. *Zhukovskiy E.S.* Obobshenno volterrovye operatory v metricheskih prostranstvah // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2009. V. 14. Iss. 3. P. 501–508.

ACKNOWLEDGEMENTS: The present research is supported by the Russian Fund for Basic Research (projects № 16-31-50037, № 17-41-680975), by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (the Agreement number 02.a03.21.0008) and by the grant of the Russian Federation President for the state support of leading scientific schools, No. NSh-8215.2016.1.

Received 10 January 2017

Burlakov Evgenii Olegovich, Norwegian University of Life Sciences, Ås, Norway, postgraduate, e-mail: eb_@bk.ru

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics; RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: zukovskys@mail.ru

Информация для цитирования:

Бурлаков Е.О., Жуковский Е.С. Об операторных включениях Вольтерры и дифференциальных включениях с отклоняющимся аргументом // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 3. С. 501–507. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-501-507

Burlakov E.O., Zhukovskiy E.S. Ob operatornyh vklyucheniyah Vol'terry i differencial'nyh vklyucheniyah s otklonyayushchimsya argumentom [On Volterra operator inclusions and differential inclusions with deviating argument]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 3, pp. 501–507. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-501-507 (In Russian)