

5. Симонов П.М., Чистяков А.В. О некоторых признаках сохранения знака функции Грина для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом // Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики. М.: Московский физико-технический институт (государственный университет), 1999.
6. Лабовский С.М. О линейных дифференциальных неравенствах. PhD thesis, Математический институт им. Размадзе. Тбилиси, 1975.
7. Krasnosel'skii M., Lifshits E., Sobolev A. Positive linear systems. The method of positive operators. Transl. from the Russian by Jürgen Appell. Berlin: Heldermann-Verlag, 1989. Zbl 0674.47036.
8. Лабовский С.М. О положительных решениях линейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1984. №20(4). С. 578–584.
9. Лабовский С.М. Положительные решения двухточечной краевой задачи для сингулярного линейного функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1988. №24(10). С. 1116–1123.
10. Крейн М.Г., Рутман М.А. Вполне непрерывные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи математических наук. 1948. №1(23). С. 3–95.

Поступила в редакцию 9 июня 2015 г.

Labovskiy S.M. ON POSITIVENESS OF GREEN FUNCTIONS OF A FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

We consider the two-point boundary value problem for a functional-differential equation. A necessary and sufficient condition for the negativity of the Green function in terms of the eigenvalues of two auxiliary problems is obtained.

Key words: Green function; functional differential equation.

Лабовский Сергей Михайлович, Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: labovski@gmail.com

Labovskiy Sergei Mikhailovich, Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: labovski@gmail.com

УДК 519.6

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ПОТЕНЦИАЛА В НЕЧЕТНО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

© Е.Б. Лансеев, М.Н. Муратов, Е.Ю. Пономаренко

Ключевые слова: некорректно поставленная задача; обратная задача потенциала; метод регуляризации Тихонова.

Получено устойчивое решение линейной обратной задачи потенциала для бесконечно тонких плоских тел в случае, когда поле потенциала задано на неплоской поверхности.

Как известно, обратная задача потенциала [1] некорректно поставлена. Ее решение может не существовать, существующее решение может быть не единственным и неустойчивым в естественных постановках. В данной работе рассматривается постановка линейной обратной задачи потенциала для бесконечно тонких плоских тел, сводящаяся к линейной задаче продолжения поля потенциала [2]. Устойчивое решение строится с использованием метода регуляризации Тихонова [3]. Задача рассматривается в рамках периодической модели

[4], приводящей к представлению решения в рядов Фурье, удобному для вычислительной реализации. Состоятельность периодической модели обоснована в [5].

1. Постановка задачи

В цилиндре

$$D^\infty = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, -\infty < z < \infty\} \quad (1)$$

рассмотрим краевую задачу для поля потенциала, соответствующего нечетно-периодической модели [4]

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E}(M) = 0, & M \in D^\infty \\ \operatorname{div} \mathbf{E}(M) = -4\pi\rho, \\ [\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_{x=0, l_x} = 0, \\ [\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_{y=0, l_y} = 0, \\ E \rightarrow 0, z \rightarrow \pm\infty. \end{cases} \quad (2)$$

Решением этой задачи является вектор функция

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^-(M) = & -\frac{8\pi}{l_x l_y} \int_{Supp\rho} dV_P \rho(P) \sum_{n,m=1}^{\infty} e^{-\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}|z_M - z_P|} \sin\left(\frac{\pi n x_P}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi m y_P}{l_y}\right) \times \\ & \times \left(\mathbf{i} \frac{\pi n}{l_x \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \cos\left(\frac{\pi n x_M}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi m y_M}{l_y}\right) + \mathbf{j} \frac{\pi m}{l_y \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \sin\left(\frac{\pi n x_M}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi m y_M}{l_y}\right) + \right. \\ & \left. + \mathbf{k} \operatorname{sign}(z_M - z_P) \sin\left(\frac{\pi n x_M}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi m y_M}{l_y}\right) \right) = \mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z, \quad (3) \end{aligned}$$

Пусть в области D^∞ вида (1) задана поверхность S

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = F(x, y)\}, \\ F &\in C^{(1,\lambda)}, S \cap Supp\rho = \emptyset. \end{aligned} \quad (4)$$

Если в области D^∞ вида (1) плотность ρ известна, то мы можем получить поле $\mathbf{E}^0$ на поверхности S по формулам (3), т. е.

$$\mathbf{E}^0 = \mathbf{E}|_S.$$

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА. Пусть теперь поле $\mathbf{E}^0$ на поверхности S задано, а плотность ρ неизвестна. Поставим задачу восстановления функции ρ по заданному полю $\mathbf{E}^0$.

Будем рассматривать тела, представляющие собой бесконечно тонкие пластины произвольной формы в плоскости $z = H$. Плотность потенциала в этом случае можно представить в виде

$$\rho(x, y, z) = \sigma(x, y)\delta(z - H), \quad (5)$$

и задача тем самым состоит в восстановлении функции $\sigma(x, y)$.

2. Восстановление плотности по известной составляющей E_z поля потенциала

Вначале рассмотрим возможность восстановления плотности $\sigma(x, y)$ в формуле (5) по известной составляющей поля E_z в области

$$D(-\infty, H) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, -\infty < z < H\}. \quad (6)$$

Для составляющей поля E_z из формулы (3) получаем

$$E_z(M) = -\frac{8\pi}{l_x l_y} \int_{Supp} dV_P \rho(P) \sum_{n,m=1}^{\infty} e^{-\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}} |z_M - z_P|} \sin\left(\frac{\pi n x_P}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi m y_P}{l_y}\right) \times \\ \times \operatorname{sign}(z_M - z_P) \sin\left(\frac{\pi n x_M}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi m y_M}{l_y}\right). \quad (7)$$

Отсюда и из (5) следует при $z_M < z_P = H$

$$E_z(M) = \frac{8\pi}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \sigma(x_P, y_P) \sum_{n,m=1}^{\infty} e^{-\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}} (H - z_M)} \times \\ \times \sin\left(\frac{\pi n x_P}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi m y_P}{l_y}\right) \sin\left(\frac{\pi n x_M}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi m y_M}{l_y}\right) dx_P dy_P = \\ = 2\pi \sum_{n,m=1}^{\infty} e^{-\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}} (H - z_M)} \sin\left(\frac{\pi n x_M}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi m y_M}{l_y}\right) \times \\ \times \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \sigma(x, y) \sin\left(\frac{\pi n x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{l_y}\right) dx dy = \\ = 2\pi \sum_{n,m=1}^{\infty} e^{-\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}} (H - z_M)} \sin\left(\frac{\pi n x_M}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi m y_M}{l_y}\right) \sigma_{nm}. \quad (8)$$

Полагая $z_M = H$, получим

$$E_z|_{z=H} = 2\pi\sigma,$$

причем, если $\sigma(M) = \sigma(M)\chi_D(M)$, где χ_D — характеристическая функция носителя функции плотности σ , то

$$E_z|_{z=H}(M) = 2\pi\sigma(M)\chi_D(M).$$

В том случае, когда $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ в пределах носителя,

$$E_z|_{z=H}(x, y) = 2\pi\sigma_0\chi_D(x, y),$$

т. е. z -составляющая поля совпадает с точностью до множителя с характеристической функцией плотности источников σ . Решив задачу продолжения поля на плоскость $z = H$, получаем фактически носитель плотности σ .

При решении практических задач параметр H может быть неизвестным. В этой ситуации функцию

$$\bar{w}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\sigma_0} E_z|_{z=\text{const} < H} \quad (9)$$

можно рассматривать как приближение к характеристической функции χ_D плотности σ . Так как функция χ_D разрывна, то оценка приближения характеристической функции χ_D функцией $\bar{w}$ не может рассматриваться в равномерной норме. Для эффективной оценки качества приближения в данном случае может быть использована мера μ симметрической разности искомой области D

$$D = \text{Supp}\chi_D$$

и области

$$D_\lambda(z) = \{(x, y) \in \Pi(0) : \bar{w}(x, y, z) > \lambda, z = \text{const}, 0 < \lambda < 1\}. \quad (10)$$

Т е о р е м а 1. $\mu(D\Delta D_\lambda(z)) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow H$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (8) и (9) следует, что

$$\|\bar{w} - \chi\|_{L_2(\Pi(0))}^2 = \frac{4}{l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} (1 - e^{-\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(H-z_M)})^2 |\chi_{nm}|^2. \quad (11)$$

Числовой ряд $\sum_{n,m=1}^{\infty} |\chi_{nm}|^2$ сходится и является мажорантным для ряда (11), так как

$$(1 - e^{-\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(H-z_M)})^2 \leq 1.$$

Таким образом, можно переходить к пределу по $H - z$, и, следовательно,

$$\|\bar{w} - \chi\|_{L_2(\Pi(0))}^2 = o(H - z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow H.$$

Из сходимости $\bar{w}$ к χ в $L_2(\Pi(0))$ следует сходимость по мере [6]. Это означает, что для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $\tau > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $z: H - z < \delta$ мера множества

$$\Omega_\tau = \{(x, y) : (x, y) \in \Pi(0), |\bar{w}(x, y) - \chi(x, y)| \geq \tau\}$$

меньше ε , т. е.

$$\mu(\Omega_\tau) < \varepsilon.$$

Выберем число τ так, чтобы $\tau < \lambda < 1 - \tau$, то есть $0 < \tau < \min[\lambda, 1 - \lambda]$. Если точка $(x, y) \in D \setminus D_\lambda$, то

$$\bar{w}(x, y) \leq \lambda < 1 - \tau = \chi(x, y) - \tau,$$

то есть $\bar{w}(x, y) - \chi(x, y) \leq -\tau$ и, следовательно, точка $(x, y) \in \Omega_\tau$. Если точка $(x, y) \in D_\lambda \setminus D$, то

$$\bar{w}(x, y) > \lambda > \tau = \tau + \chi(x, y),$$

следовательно, $\bar{w}(x, y) - \chi(x, y) > \tau$, то есть $(x, y) \in \Omega_\tau$. Таким образом, из условия

$$(x, y) \in D_\lambda \Delta D = (D_\lambda \setminus D) \cup (D \setminus D_\lambda)$$

следует, что $(x, y) \in \Omega_\tau$, то есть $D_\lambda \Delta D \subset \Omega_\tau$ и

$$\mu(D_\lambda \Delta D) \leq \mu(\Omega_\tau) < \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого $z: H - z < \delta$

$$\mu(D_\lambda \Delta D) < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Ниже обосновано построение приближения D_λ к носителю плотности источников бесконечно тонкого тела для устойчивого приближенного продолжения поля потенциала.

3. Решение обратной задачи в случае точно заданного поля $\mathbf{E}^0$

В работе [2] показано, что составляющая поля E_z , получаемая продолжением поля $\mathbf{E}^0$ с поверхности S вида (4), может быть представлена в виде продолжения с плоскости $z = a$, $a < \min_{(x,y)} F(x, y)$

$$E_z(M) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_{z,nm}(a) e^{\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}} (z_M - a)} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}, \quad (12)$$

где $\tilde{\Phi}_{z,nm}(a)$ — коэффициенты Фурье

$$\tilde{\Phi}_{z,nm}(a) = \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \Phi_z(x, y, a) \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} dx dy$$

функции Φ_z вида

$$\begin{aligned} \Phi_z(M) = \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} [E_x^0(x_P, y_P) \frac{\partial}{\partial x_P} \varphi(M, P)|_{P \in S} + E_y^0(x_P, y_P) \frac{\partial}{\partial y_P} \varphi(M, P)|_{P \in S} + \\ + E_z^0(x_P, y_P) (\mathbf{n}_1, \nabla_P \varphi(M, P))|_{P \in S}] dx_P dy_P, \end{aligned} \quad (13)$$

вычисляется по заданному полю $\mathbf{E}^0$

$$\varphi(M, P) = \frac{2}{\pi l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}} |z_M - z_P|}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y} \quad (14)$$

— функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в цилиндре D^∞ .

Решение обратной задачи получаем из (10), (9), (12).

4. Решение обратной задачи в случае приближенно заданного поля $\mathbf{E}^0$

Пусть теперь вместо точной вектор-функции $\mathbf{E}^0$ известна функция $\mathbf{E}^{0,\delta} = (E_x^{0,\delta}, E_y^{0,\delta}, E_z^{0,\delta})$ такая, что

$$\|\mathbf{E}^{0,\delta} - \mathbf{E}^0\|_{L_2(\Pi(0))} = \delta.$$

В этом случае функция Φ_z вида (13) вычисляется приближенно:

$$\begin{aligned} \Phi_z^\delta(M) = \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} [E_x^{0,\delta}(x_P, y_P) \frac{\partial}{\partial x_P} \varphi(M, P)|_{P \in S} + E_y^{0,\delta}(x_P, y_P) \frac{\partial}{\partial y_P} \varphi(M, P)|_{P \in S} + \\ + E_z^{0,\delta}(x_P, y_P) (\mathbf{n}_1, \nabla_P \varphi(M, P))|_{P \in S}] dx_P dy_P; \end{aligned} \quad (15)$$

при этом устойчивое приближенное продолжение составляющей поля E_z с поверхности S может быть получено [2] с использованием метода регуляризации Тихонова [3] и отличается от (12) регуляризирующим множителем

$$E_{z,\alpha}^\delta(M) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_{z,nm}^\delta(a) e^{\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}} (z_M - a)}}{1 + \alpha e^{2\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}} (H - a)}} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}, \quad (16)$$

где $\tilde{\Phi}_{z,nm}^\delta(a)$ — коэффициенты Фурье функции $\Phi_z^\delta|_{\Pi(a)}$ вида (15). Сходимость приближенного решения (16) к точному решению (12) обеспечивает теорема

Т е о р е м а 2 [2]. Для любого $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ такого, что $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ и $\delta/\sqrt{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ функция $E_{z,\alpha}^\delta$ вида (16) равномерно сходится к точному решению в $D(-\infty, H)$.

В соответствии с (9) функция

$$\bar{w}_\alpha^\delta = \frac{1}{2\pi\sigma_0} E_{z,\alpha}^\delta|_{z=const} \quad (17)$$

может рассматриваться как приближение к характеристической функции χ и критерием качества приближения может служить мера симметрической разности области

$$D = \text{Supp}\chi_D$$

и области

$$D_\lambda^\delta(z) = \{(x, y) \in \Pi(0) : \bar{w}_\alpha^\delta(x, y, z) > \lambda, z = const, 0 < \lambda < 1\}. \quad (18)$$

Т е о р е м а 3. В условиях теоремы сходимости $\mu(D_\lambda^\delta(z)\Delta D) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0, z \rightarrow H$.
Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 2 следует, что

$$\|\bar{w}_\alpha^\delta - \bar{w}\|_{L_2(\Pi(0))} = C \frac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}} + o(\alpha(\delta)) \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0. \quad (19)$$

При доказательстве теоремы 1 получено

$$\|\bar{w} - \chi\|_{L_2(\Pi(0))}^2 = o(H - z), z \rightarrow H. \quad (20)$$

Оценивая разность $w_\alpha^\delta - \chi$ в норме $L_2(\Pi(0))$, применяя неравенство треугольника, получаем

$$\|w_\alpha^\delta - \chi\| \leq \|w_\alpha^\delta - w\| + \|w - \chi\|.$$

Отсюда и из (19) и (20) следует

$$\|w_\alpha^\delta - \chi\| \leq C \frac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}} + o(\alpha(\delta)) + o(H - z) \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, z \rightarrow H.$$

Далее доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 1.

Формулы (18), (17), (16), (15) решают поставленную задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прилепко А.И. Обратные задачи теории потенциала // Матем. заметки. 1973. Т. 14. № 5. С. 755-767.
2. Ланев Е.Б. Устойчивое решение одной некорректно поставленной краевой задачи для потенциального поля // Вестник РУДН. Серия Прикладная математика и информатика. 2000. № 1. С. 105-112.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
4. Ланев Е.Б. О некоторых постановках задачи продолжения потенциального поля // Вестник РУДН. Серия Физика. 2000. № 8(1). С. 21-28.
5. Ланев Е.Б. О погрешности периодической модели задаче продолжения потенциального поля // Вестник РУДН. Серия Физика. 2001. № 9(1). С. 4-16.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15-01-05134).

Поступила в редакцию 26 мая 2015 г.

Laneev E.B., Muratov M.N., Ponomarenko E.Yu. LINEAR INVERSE PROBLEM OF POTENTIAL IN THE ODD-PERIODIC MODELS

Obtained steady solution of the linear inverse problem of the potential for infinitely thin flat bodies in the case when the potential is set to a non-planar surface.

Key words: ill-posed problem; linear inverse problem of the potential; method of Tikhonov regularization.

Ланеев Евгений Борисович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: elaneev@yandex.ru

Laneev Evgeniy Borisovich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: elaneev@yandex.ru

Муратов Михаил Николаевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: finger@ramler.ru

Muratov Mikhail Nikolaevich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Dotsent of Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: finger@ramler.ru

Пономаренко Екатерина Юрьевна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, аспирант кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: finger@ramler.ru

Ponomarenko Ekaterina Yuryevna, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Post-graduate Student of Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: finger@ramler.ru

УДК 517.929

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© А.С. Ларионов, А.С. Толстиков

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение; нелинейная краевая задача; функция Грина.

Рассматривается нелинейное функционально-дифференциальное уравнение второго порядка нейтрального типа. Приводятся достаточные условия существования решения некоторых краевых задач для этого уравнения.

Для математического описания динамических процессов с давних пор используются дифференциальные уравнения. В большинстве случаев это линейные дифференциальные уравнения или системы таких уравнений, т. к. теория линейных уравнений достаточно хорошо разработана и, к тому же, линейные уравнения часто дают первое приближение реального процесса. Впоследствии, однако, выяснилось, что существуют такие реальные объекты, для полного, адекватного описания которых линейные модели оказываются слишком грубыми или вообще невозможными. Таким образом, возникла необходимость изучения нелинейных задач для дифференциальных уравнений. Центральный вопрос в теории краевых