УДК 517.929.4+519.21

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© **Р.И. Кадиев**

Ключевые слова: устойчивость решений по части переменных; линейные импульсные дифференциальные уравнений Ито с последействием; метод вспомогательных или модельных уравнений.

Исследуются вопросы моментной устойчивости решений по части переменных относительно начальных данных для линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с последействием. Исследование проводится методом вспомогательных или модельных уравнений. Получены достаточные условия устойчивости в терминах параметров исследуемых систем.

Импульсные дифференциальные уравнения Ито с последействием являются хорошей математической моделью для финансовых процессов. Некоторым вопросам устойчивости решений для линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с последействием посвящены работы [1–4]. Вопросы устойчивости решений по части переменных относительно начальных данных для линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с последействием, по-видимому, ранее не исследовались. Главной целью исследований было развитие метода вспомогательных уравнений применительно к исследованию вопросов устойчивости по начальным данным по части переменным решений линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с последействием. Вопросы устойчивости по части переменных для линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений методом вспомогательных уравнений были изучены в работах [5], [6].

Пусть: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geqslant 0}, P)$ — стохастический базис; k^n — линейное пространство n–мерных $\mathcal{F}_0$ — измеримых случайных величин; $\mathcal{B}_i, i = 2, ..., m$ — скалярные независимые стандартные винеровские процессы; $1 \leqslant p < \infty$; E — символ математического ожидания; $|.|$ — норма в R^n; $||.||$ — норма $l \times n$–матрицы, согласованная с нормой в R^n; μ — мера Лебега на $[0, \infty)$.

Рассматривается линейная импульсная система дифференциальных уравнений Ито вида

$$dx(t) = \sum_{j=0}^{m_1} A_{1j}(t)x(h_{1j}(t))dt + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=0}^{m_i} A_{ij}(t)x(h_{ij}(t))d\mathcal{B}_i(t)\ (t \geqslant 0), \tag{1}$$

$$x(\nu) = \varphi(\nu)\ (\nu < 0), \tag{2}$$

$$x(\mu_j) = A_j x(\mu_j - 0), j = 1, 2, 3, ...\ \text{почти наверно (п.н.)}, \tag{3}$$

где $\mu_j, A_j, j = 1, 2, 3, ...$ — действительные числа такие, что $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < ...$, $\lim\limits_{j\to\infty} \mu_j = \infty$; φ — случайный процесс, который не зависит от винеровских процессов $\mathcal{B}_i, i = 2, ..., m$, и имеет п.н. ограниченные в существенном траектории; $A_{ij}, i = 1, ..., m, j = 0, ..., m_i$ — $n \times n$–матрицы, элементы матриц $A_{1j}, j = 0, ..., m_1$ — прогрессивно измеримые случайные процессы, траектории которых п.н. локально суммируемы, элементы матриц $A_{ij}, i = 2, ..., m, j = 0, ..., m_i$ — прогрессивно измеримые случайные процессы, траектории которых п.н. локально суммируемы с квадратом; h_{ij}, $i = 1, ..., m, j = 0, ..., m_i$ — измеримые по Лебегу функции такие, что $h_{ij}(t) \leqslant t$ при $t \in [0, \infty)$ μ–почти всюду (п.в.), $i = 1, ..., m, j = 0, ..., m_i$.

Ведем следующие обозначения

$$(S_h x)(t) = \begin{cases} x(h(t)), \text{если}\, h(t) \geqslant 0 \ \mu - \text{п. в.}, \\ 0, \text{если}\, h(t) < 0 \ \mu - \text{п. в.}, \end{cases} \quad \varphi_h(t) = \begin{cases} 0, \text{если}\, h(t) \geqslant 0 \ \mu - \text{п. в.}, \\ \varphi(h(t)), \text{если}\, h(t) < 0 \ \mu - \text{п. в.}. \end{cases}$$

В дальнейшем будем пользоваться следующей записью уравнения (1)–(3):

$$dx(t) = ((Vx)(t) + f(t))dZ(t)\,(t \geqslant 0), \tag{4}$$

где $(Vx)(t) = \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} (1 - A_j)\delta(t - \mu_j)x(t) + \sum\limits_{j=0}^{m_1} A_{1j}(t)(S_{h_{1j}}x)(t)), \sum\limits_{j=0}^{m_2} A_{2j}(t)(S_{h_{2j}}x)(t), ..., \sum\limits_{j=0}^{m_m} A_{mj}(t)(S_{h_{mj}}x(t) \right)$, $f(t) = \left(\sum\limits_{j=0}^{m_1} A_{1j}(t)\varphi_{h_{1j}}(t)), \sum\limits_{j=0}^{m_2} A_{2j}(t)\varphi_{h_{2j}}(t), ..., \sum\limits_{j=0}^{m_m} A_{mj}(t)\varphi_{h_{mj}}(t) \right)$, $Z(t) = col(t, \mathcal{B}_2(t), ..., \mathcal{B}_m(t))$.

Пусть: D^n — линейное пространство n–мерных прогрессивно измеримых случайных процессов на $[0, +\infty)$, траектории которых п.н. непрерывно справа и имеют пределы слева; $L^n(Z)$ — линейное пространство $n \times m$–матриц на $[0, +\infty)$, строки которых m–мерные прогрессивно измеримые случайные процессы локально интегрируемые по Z; L^n — линейное пространство n–мерных случайных процессов на $(-\infty, 0)$, которые не зависят от винеровских процессов $\mathcal{B}_i, i = 2, ..., m$, и имеет п.н. ограниченные в существенном траектории; $\gamma : [0, +\infty) \to R^1$ — положительная непрерывная функция; l — некоторое фиксированное натуральное число, удовлетворяющее неравенству $1 \leqslant l < n$; для любого $x \in D^n$ введем обозначения $y = col(x^1, ..., x^l)$ и $h = col(x^{l+1}, ..., x^n)$.

Введем следующие обозначения линейных нормированных пространств:

$$M_p^\gamma = \left\{ x : x \in D^k, ||x||_{M_p^\gamma} \stackrel{def}{=} \sup_{t \geqslant 0} (E|\gamma(t)x(t)|^p)^{1/p} < \infty \right\} (M_p^1 = M_p);$$

$$k_p^n = \left\{ \alpha : \alpha \in k^n, ||\alpha||_{k_p^n} \stackrel{def}{=} (E|\alpha|^p)^{1/p} < \infty \right\};$$

$$L_p^n = \left\{ \varphi : \varphi \in L^n, ||\varphi||_{L_p^n} \stackrel{def}{=} \underset{\nu < 0}{vraisup}\, (E|\varphi(\nu)|^p)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Известно, что через любое $x(0) \in k^n$ проходит единственное решение уравнения (1)—(3) (с точностью до P–эквивалентности). Обозначим это решение через $x(t, x(0), \varphi)$. Отметим, что уравнение (1)—(3) называют однородным, если $\varphi(\nu) \equiv 0 \quad (\nu < 0)$. Через $x_f(t, x(0))$ обозначим решение уравнения (4) такой, что $x_f(0, x(0)) = x(0)$. Тогда для уравнения (4) также справедлива

Л е м м а. *Для решения $x_f(t, x(0))$ уравнения (4), где $x(0) \in k^n$ задает начальное условие для этого решения, имеет место представление*

$$x_f(t, x(0)) = X(t)x(0) + (Cf)(t) \ (t \geqslant 0), \tag{6}$$

где $X(t)(X(0) = \bar{E}$ — единичная матрица) — $n \times n$–матрица, столбцами которой являются решения однородного уравнения (4) (фундаментальная матрица), а $C : L^n(Z) \to D^n$ — линейный оператор (оператор Коши) такой, что Cf — решение уравнения (4), удовлетворяющее условию $(Cf)(0) = 0$.

О п р е д е л е н и е 1. Тривиальное решение однородного уравнения (1)–(3) $x(t,0,0)\equiv 0$ называют:

— *p–устойчивым* относительно первых l компонент, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при любых $x(0)\in k_p^n$, $\varphi \in L_p^n$ и $\|x(0)\|_{k_p^n} + \|\varphi\|_{L_p^n} < \delta(\varepsilon)$ будет выполнено неравенство $(E|y(t,x(0),\varphi)|^p)^{1/p} \leqslant \varepsilon$ для любого $t\geqslant 0$;

— *асимптотически p–устойчивым* относительно первых l компонент, если оно p–устойчиво, и, кроме того, для любых $x(0)\in k_p^n$, $\varphi\in L_p^n$ и $\|x((0)\|_{k_p^n} + \|\varphi\|_{L_p^n} < \delta(\varepsilon)$ будет $\lim\limits_{t\to+\infty}(E|y(t,x(0),\varphi)|^p)^{1/p} = 0$;

— *экспоненциально p–устойчивым* относительно первых l компонент, если существуют некоторые положительные числа $\bar c,\beta$ такие, что для любых $x(0)\in k_p^n$, $\varphi\in L_p^n$ справедливо неравенство $(E|y(t,x(0),\varphi)|^p)^{1/p} \leqslant \bar c(\|x(0)\|_{k_p^n} + \|\varphi\|_{L_p^n})\exp\{-\beta t\}$.

О п р е д е л е н и е 2. Уравнение (1)–(3) назовем $M_p^\gamma y$–устойчивым, если для любых $x(0)\in k_p^n$, $\varphi\in L_p^n$ для решения уравнения (1)–(3) $x(.,x(0),\varphi)$ имеем $y(.,x(0),\varphi)\in M_p^\gamma$ и выполнено неравенство

$$\|y(.,x(0),\varphi)\|_{M_p^\gamma} \leqslant \bar c(\|x(0)\|_{k_p^n} + \|\varphi\|_{L_p^n}) \tag{7}$$

для некоторого положительного числа $\bar c$.

Очевидно, что:

— из $M_p y$–устойчивости уравнения (1)–(3) следует p–устойчивость тривиального решения однородного уравнения (1)–(3) относительно первых l компонент;

— из $M_p^\gamma y$–устойчивости уравнения (1)–(3) (где $\gamma(t)\geqslant\delta>0$ $(t\geqslant 0)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma(t)=+\infty$) следует асимптотическая p–устойчивость тривиального решения однородного уравнения (1)–(3) относительно первых l компонент;

— из $M_p^\gamma y$–устойчивости уравнения (1)–(3) (где $\gamma(t)=\exp\{\beta t\}$, β — некоторое положительное число) следует экспоненциальная p–устойчивость тривиального решения однородного уравнения (1)–(3) относительно первых l компонент.

Так как $x=col(y,h)$ и $D^n = D^l\times D^{n-l}$, то уравнение (4) эквивалентно системе вида

$$\begin{cases} dy(t) = [(V_1y)(t) + (V_2h)(t) + f^y(t)]dZ(t)\ (t\geqslant 0), \\ dh(t) = [(V_3y)(t) + (V_4h)(t) + f^h(t)]dZ(t)\ (t\geqslant 0), \end{cases} \tag{8}$$

где $V_1 : D^l \to L^l(Z)$, $V_2 : D^{n-l}\to L^l(Z)$, $V_3 : D^l\to L^{n-l}(Z)$, $V_4 : D^{n-l}\to L^{n-l}(Z)$ суть линейные операторы, определяемые оператором V, $f^y\in L^l(Z)$, $f^h\in L^{n-l}(Z)$, $f = col(f^y,f^h)$.

В силу того, что через любое $x(0)\in k^n$ проходит единственное решение уравнения (4), каждое из уравнений системы (8) в отдельности будеть иметь единственное решение при любых фиксированных $y(0)\in k^l$, $h\in D^{n-l}$ и $h(0)\in k^{n-l}$, $y\in D^l$ соответственно. Тогда, в силу леммы, второе уравнение системы (8) эквивалентно уравнению

$$h(t) = H(t)h(0) + (C_1(f^h + V_3y))(t)\ (t\geqslant 0),$$

где H —фундаментальная матрица, а C_1 — оператор Коши для второго уравнения системы (8). Следовательно, из первого уравнения системы (8) получим

$$dy(t) = [(V_5y)(t) + (V_2(Hh(0)))(t) + (V_2C_1f^h)(t) + f^y(t)]dZ(t)\ (t\geqslant 0), \tag{9}$$

где $V_5 = V_1 + V_2C_1V_3$.

Отсюда следует, что уравнение (1)–(3) $M_p^\gamma y$–устойчиво тогда и только тогда, когда при любых $x(0)\in k_p^n$, $\varphi\in L_p^n$ решение уравнения (9) $y(.,x(0),\varphi)$ принадлежит пространству M_p^γ и для него выполнено неравенство (7).

Для установления принадлежности решения уравнения (9) $y(.,x(0),\varphi)$ пространству M_p^γ при любых $x(0)\in k_p^n$, $\varphi\in L_p^n$ и выполнимости для него неравенства (7) воспользуемся W–преобразованием, т.е. эквивалентным преобразованием уравнения (9). Для описания W–преобразования уравнения (9) рассмотрим модельное уравнение, асимптотические свойства решений которого известны. Пусть модельное уравнение имеет вид

$$dy(t)=[(Qy)(t)+g(t)]dZ(t)\ (t\geqslant 0), \tag{10}$$

где $Q:D^l\to L^l(Z)$ — линейный оператор; Z определен ранее; $g\in L^l(Z)$. Предполагается, что через любое $y(0)\in k^l$ проходит единственное (с точностью до P–эквивалентности) решение уравнения (9). Тогда, в силу леммы, для решения y этого уравнения имеет место представление $y(t)=U(t)y(0)+(Wg)(t), t\geqslant 0$, где U — фундаментальная матрица, W — оператор Коши для уравнения (10).

Уравнение (9) при помощью модельного уравнения (10) перепишем в виде

$$y(t)=U(t)y(0)+(W(V_5-Q)y)(t)+(WV_2(Hh(0)))(t)+(W(V_2C_1f^h+f^y))(t)\,(t\geqslant 0).$$

Обозначив $W(V_5-Q)=\Theta$, получим

$$((I-\Theta)y)(t)=U(t)y(0)+(WV_2(Hh(0)))(t)+(W(V_2C_1f^h+f^y))(t)\ (t\geqslant 0).$$

Т е о р е м а . *Пусть $Uy(0)+WV_2(Hh(0))+W(V_2C_1f^h+f^y)\in M_p^\gamma$ для любых $x(0)\in k_p^n$, $\varphi\in L_p^n$ и $||Uy(0)+WV_2(Hh(0))+W(V_2C_1f^h+f^y)||_{M_p^\gamma}\leqslant \bar c(||x(0)||_{k_p^n}+||\varphi||_{L_p^n})$ для некоторого положительного числа $\bar c$, а оператор Θ действует в пространстве M_p^γ. Тогда, если оператор $(I-\Theta):M_p^\gamma\to M_p^\gamma$ непрерывно обратим, то уравнение (1)–(3) $M_p^\gamma y$–устойчиво.*

Пользуясь этой теоремой получены достаточные условия устойчивости решений различных классов уравнений вида (1)—(3) в терминах параметров этих уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кадиев Р.И.* Устойчивость решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями по линейному приближению // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 8. С. 963-970.

2. *Kadiev R., Ponosov A.* Stability of impulsive stochastic differential linear functional equations with linear delays // J. of Abstract Differential Equations and Applications. 2012. V. 2. № 2. P. 7-25.

3. *Кадиев Р.И., Поносов А.В.* Устойчивость решений линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с ограниченными запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 4. С. 486-498.

4. *Кадиев Р.И., Поносов А.В.* Устойчивость решений линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с последействием // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 7. С. 879-885.

5. *Кадиев Р.И.* Достаточные условия устойчивости по части переменных линейных стохастических систем с последействием // Изв. вузов. Математика. 2000. № 6. С. 75-79.

6. *Кадиев Р.И.* Допустимость пар пространств по части переменных для линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1994. № 4. С. 1-10.

Поступила в редакцию 1 июня 2015 г.

Kadiev R.I. THE PROBLEM OF STABILITY ACCORDING TO INITIAL DATA ON THE PART OF VARIABLE SOLUTIONS OF LINEAR IMPULSIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH AFTEREFFECT

Problems of moment solutions' stability on the part of variables regarding initial data for linear impulsive differential equations with the consequence are considered here. The research is conducted by the method of auxiliary or model equations. Sufficient stability conditions in terms of parameters of the researched systems are received.

Key words: solutions' stability on the part of variables; linear impulsive differential equations with aftereffect; method of the auxiliary or model equations.

Кадиев Рамазан Исмаилович, Дагестанский научный центр, Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, e-mail: kadiev_r@mail.ru

Kadiev Ramazan Ismailovich, Dagestan Research Center, Dagestan State University, Makhachkala, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Applied Mathematics Department, e-mail: kadiev_r@mail.ru

УДК 517.977.5

ОБ УПРАВЛЕНИИ С ПОВОДЫРЕМ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫВЕДЕНИЯ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ

© **И.Н. Кандоба, И.В. Козьмин, Е.К. Костоусова, В.И. Починский**

Ключевые слова: оскулирующая орбита; динамическая система; оптимальное управление; фазовые ограничения; поводырь; сопутствующие позиции.

Рассматривается задача оптимального выведения ракеты-носителя на заданную околоземную эллиптическую орбиту при ограничениях на управление и текущее фазовое состояние нелинейной динамической системы, описывающей движение носителя. Математическая модель управляемого движения ракеты-носителя включает уравнения поступательного движения его центра масс и уравнения вращательного движения носителя как твердого тела. Требуется построить программное управление, обеспечивающее выведение ракетой-носителем на заданную орбиту полезной нагрузки максимальной массы. Для построения допустимых в этой задаче управлений предлагается один подход, основанный на методологии решения задач управления с поводырем. Приводятся результаты численного моделирования с использованием реальных данных.

Данная работа посвящена вопросам построения конструктивных методов решения одной прикладной задачи оптимального управления нелинейной динамической системой при ограничениях на управление и текущее фазовое состояние системы. Для исследования этой задачи использованы подходы, основанные на идеологии задач управления с поводырем [1], [2] и обратных задач динамики [3]. Для построения допустимых управлений предлагаются методы, которые доведены до реализуемых вычислительных алгоритмов. Приводятся результаты численного моделирования с использованием реальных данных, свидетельствующие о достаточной эффективности предлагаемых подходов к решению исследуемой задачи.

Рассмотрим задачу оптимального управления нелинейной динамической системой, описывающей движение ракеты-носителя (РН) от точки старта до момента выхода РН на заданную околоземную эллиптическую орбиту. Здесь, в отличие от [4, 5], математическая модель управляемого движения РН включает уравнения поступательного движения его центра масс и уравнения вращательного движения носителя как твердого тела. Двигательная установка РН состоит из одного жестко закрепленного основного двигателя, создающего тягу вдоль оси симметрии РН, и четырех подвижных рулевых двигателей. Движение