3. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. С. 387-395.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 13-07-01020.

Поступила в редакцию 10 июня 2015 г.

Ostapov V.A., Olenev N.N. OPTIMIZATION IN AN INVESTMENT POLICY DYNAMIC MODEL OF INNOVATIVE SECTOR FIRMS

The article investigates the problem of investing in innovative projects. A dynamic model of a lifecycle during an investment period of such a firms is given. Non-autonomous optimal control problem for an innovative firm is solved.

*Key words:* dynamic modeling; venture investment; optimal control.

Остапов Всеволод Александрович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, аспирант кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: vaostapov@gmail.com

Ostapov Vsevolod Aleksandrovich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: vaostapov@gmail.com

Оленев Николай Николаевич, Вычислительный центр им. А.А Дородницына РАН, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: nolenev@yahoo.com

Olenev Nicholai Nicholaevich, Dorodnicyn Computing Center of RAS, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, e-mail: nolenev@yahoo.com

УДК 515.124

# О ВПОЛНЕ ОГРАНИЧЕННЫХ И КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ В ПРОСТРАНСТВЕ ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

© **Е.А. Панасенко**

*Ключевые слова*: пространство замкнутых подмножеств метрического пространства; вполне ограниченное множество; компактное множество.

В работе продолжены исследования [1, 2] пространства $\operatorname{clos}(X)$ непустых замкнутых подмножеств метрического пространства $X$ с метрикой $\rho_X^{\mathrm{cl}}$. В частности, рассмотрены критерии полной ограниченности и компактности множеств в $\left(\operatorname{clos}(X), \rho_X^{\mathrm{cl}}\right)$.

Пусть $(X, \varrho_X)$ — метрическое пространство. Будем использовать следующие обозначения: $\overline{M} \doteq X \setminus M$ — дополнение к множеству $M \subset X$; $\operatorname{clos}(X)$ и $\operatorname{clbd}(X)$ — пространства всех *непустых замкнутых*, *непустых замкнутых ограниченных* подмножеств $X$, соответственно; $B_X^o(x_0, r) \doteq \{x \in X : \varrho_X(x, x_0) < r\}$, $B_X(x_0, r) \doteq \{x \in X : \varrho_X(x, x_0) \leqslant r\}$ — открытый и, соответственно, замкнутый шары в пространстве $X$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $x_0$; $B_X^o(x_0, 0) = \varnothing$; $\varrho_X(x, M) \doteq \inf\limits_{y \in M} \varrho_X(x, y)$ — расстояние в $X$ от точки $x$ до множества $M \neq \varnothing$; $d_X(M_1, M_2) \doteq \sup\limits_{x \in M_1} \varrho_X(x, M_2)$ — полуотклонение по Хаусдорфу множества

$M_1$ от $M_2$; $\operatorname{dist}_X(M_1, M_2) \doteq \max\big\{d_X(M_1, M_2); d_X(M_2, M_1)\big\}$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами $M_1$, $M_2$.

Будем считать, что *пространство* $X$ *неограниченное*, то есть для любого $\xi \in X$ выполнено

$$\sup_{x\in X} \varrho_X(\xi, x) = \infty.$$

Рассмотрим пространство $\operatorname{clos}(X)$, которое наделим метрикой $\rho_X^{\mathrm{cl}}$. Напомним определение этой метрики и некоторые изученные ранее свойства пространства $(\operatorname{clos}(X), \rho_X^{\mathrm{cl}})$.

Пусть $\theta$ — некоторая фиксированная точка $X$. Будем обозначать $B_X^o(r) \doteq B_X^o(\theta, r)$, $B_X(r) \doteq B_X(\theta, r)$. Для каждого $r \geqslant 0$ определим оператор $\mathfrak{S}_r : \operatorname{clos}(X) \to \operatorname{clos}(X)$ равенством

$$\mathfrak{S}_r H \doteq H \cup \overline{B_X^o(r)}. \tag{1}$$

Л е м м а 1. [1, 2] *Для любых* $F, G \in \operatorname{clos}(X)$ *выполнено:*

1) *функции* $r \mapsto d_X\big(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G\big)$, $\quad r \mapsto \operatorname{dist}_X\big(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G\big)$ *не убывают;*

2) $d_X\big(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G\big) < \infty$ *и* $\operatorname{dist}_X\big(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G\big) < \infty$ *для любого* $r \geqslant 0$;

3) *для любого* $r \geqslant 0$

$$\operatorname{dist}_X\big(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G\big) \leqslant \operatorname{dist}_X(F, G). \tag{2}$$

Для любых $F, G \in \operatorname{clos}(X)$ положим

$$\rho_X^o(F, G) \doteq \big|\varrho_X(\theta, F) - \varrho_X(\theta, G)\big|,$$

$$\rho_X^{\mathfrak{S}}(F, G) \doteq \sup_{r>0} \min\left\{\operatorname{dist}_X\big(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G\big),\ \frac{1}{r}\right\}, \tag{3}$$

$$\rho_X^{\mathrm{cl}}(F, G) \doteq \rho_X^o(F, G) + \rho_X^{\mathfrak{S}}(F, G).$$

Л е м м а 2. [1, 2] 1) *Значение* $\rho_X^{\mathrm{cl}}(F, G)$ *конечно для любых* $F, G \in \operatorname{clos}(X)$.

2) *Функция* $\rho_X^{\mathrm{cl}} : \operatorname{clos}(X) \times \operatorname{clos}(X) \to \mathbb{R}_+$ *определяет метрику в пространстве* $\operatorname{clos}(X)$.

3) *Если пространство* $(X, \varrho_X)$ *полное, то и пространство* $\big(\operatorname{clos}(X), \rho_X^{\mathrm{cl}}\big)$ *является полным.*

4) *Последовательность множеств* $\{F_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \operatorname{clos}(X)$ *сходится к множеству* $F \in \operatorname{clos}(X)$ *в метрике* $\rho_X^{\mathrm{cl}}$ *тогда и только тогда, когда* $\varrho_X(\theta, F_i) \to \varrho_X(\theta, F)$ *и существует такое* $r_0 > 0$, *что* $\operatorname{dist}_X(\mathfrak{S}_r F_i, \mathfrak{S}_r F) \to 0$ *для любого* $r \geqslant r_0$.

Точку $\theta$ для определения метрики $\rho_X^{\mathrm{cl}}$ можно выбирать произвольно, то есть при замене $\theta \in X$ на некоторое $\theta_1 \in X$ мы получим эквивалентную метрику в $\operatorname{clos}(X)$.

Как показано в [2], в определениях $\rho_X^{\mathfrak{S}}$ и $\rho_X^{\mathrm{cl}}$ вместо оператора (1), образы которого неограничены, можно использовать другой оператор, образы которого будут ограниченными «аналогами» множеств $\mathfrak{S}_r F$ и $\mathfrak{S}_r G$. А именно: для каждого $r > 0$, в силу неограниченности пространства $X$, существует такой элемент $\widetilde{x}_r \in X$, что $R_0(r) \doteq \varrho_X(\theta, \widetilde{x}_r) \geqslant r$; положим

$$R(r) \doteq R_0(r) + 2r \tag{4}$$

и определим оператор $\mathfrak{C}_{R(r)} : \operatorname{clos}(X) \to \operatorname{clbd}(X)$ равенством

$$\mathfrak{C}_{R(r)} H \doteq \mathfrak{S}_r H \cap B_X(R(r)) = \big(H \cup \overline{B_X^o(r)}\big) \cap B_X(R(r))\,.$$

Тогда для произвольного $r > 0$ и любых $F, G \in \operatorname{clos}(X)$ выполнено

$$\operatorname{dist}_X\big(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G\big) = \operatorname{dist}_X\big(\mathfrak{C}_{R(r)} F, \mathfrak{C}_{R(r)} G\big) \tag{5}$$

(см. [2]), и, следовательно, $\rho_X^{\mathfrak{S}}$ можно вычислять по формуле

$$\rho_X^{\mathfrak{S}}(F,G) = \sup_{r>0} \min\left\{\operatorname{dist}_X\big(\mathfrak{C}_{R(r)} F, \mathfrak{C}_{R(r)} G\big),\, \frac{1}{r}\right\}. \tag{6}$$

Если пространство $X$ — линейное нормированное, то равенство (5) будет выполнено при $R(r) = r$ (что может быть неверно для произвольного пространства $X$); один из таких случаев, $X = \mathbb{R}^n$, рассмотрен в работе [3].

Каждое из приведенных определений функции $\rho_X^{\mathfrak{S}}$ имеет свои преимущества. Так, формулу (3) удобнее использовать при вычислениях величин $\rho_X^{\mathfrak{S}}(F,G)$ и $\rho_X^{\mathrm{cl}}(F,G)$ для конкретных множеств $F$ и $G$, в то время как формула (6) позволяет применять известные результаты, например, из теории многозначных отображений с замкнутыми ограниченными или компактными образами для изучения многозначных отображений с замкнутыми не обязательно ограниченными образами.

Следующее утверждение выражает признак полной ограниченности множества замкнутых подмножеств относительно метрики $\rho_X^{\mathrm{cl}}$ в пространстве $\operatorname{clos}(X)$.

Т е о р е м а 1. *Множество* $\mathcal{M} \subset \big(\operatorname{clos}(X), \rho_X^{\mathrm{cl}}\big)$ *вполне ограничено тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) *существует* $c > 0$ *такое, что* $\varrho_X(\theta, M) \leqslant c$ *для любого* $M \in \mathcal{M}$ *и*
2) *множество*

$$\mathfrak{S}_{\bar r}\mathcal{M} \doteq \{\mathfrak{S}_{\bar r} M : M \in \mathcal{M}\}$$

*вполне ограничено в пространстве* $(\operatorname{clos}(X), \operatorname{dist}_X)$ *при любом* $\bar r > c$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть множество $\mathcal{M}$ вполне ограничено. Покажем, что имеют место свойства 1) и 2).

Из полной ограниченности $\mathcal{M}$ следует его ограниченность, то есть $\mathcal{M} \subset B_{\operatorname{clos}(X)}(\{\theta\}, c)$, $c > 0$. Тогда для любого множества $M \in \mathcal{M}$, в силу неравенства $\rho_X^{\mathrm{cl}}(\{\theta\}, M) \leqslant c$, получаем соотношения

$$\varrho_X(\theta, M) = \rho_X^{o}(\{\theta\}, M) \leqslant \rho_X^{\mathrm{cl}}(\{\theta\}, M) \leqslant c.$$

Таким образом, свойство 1) выполнено.

Докажем, что имеет место 2). Для этого возьмем произвольное $\bar r > c$, произвольное $\varepsilon > 0$, и покажем, что для множества $\mathfrak{S}_{\bar r}\mathcal{M}$ существует конечная $\varepsilon$-сеть. Рассмотрим два случая: $\bar r < \varepsilon^{-1}$ и $\bar r > \varepsilon^{-1}$.

а) Пусть $\bar r < \varepsilon^{-1}$ и пусть $\mathcal{N}(\varepsilon)$ — конечная $\varepsilon$-сеть для множества $\mathcal{M}$. Это означает, что для любого $M \in \mathcal{M}$ существует $N \in \mathcal{N}(\varepsilon)$ такое, что $\rho_X^{\mathrm{cl}}(M,N) \leqslant \varepsilon$. Тогда $\rho_X^{\mathfrak{S}}(M,N) \leqslant \varepsilon$, и имеют место следующие соотношения:

$$\varepsilon \geqslant \rho_X^{\mathfrak{S}}(M,N) = \sup_{r>0} \min\left\{\operatorname{dist}_X\big(\mathfrak{S}_r M, \mathfrak{S}_r N\big), \frac{1}{r}\right\} \geqslant \min\left\{\operatorname{dist}_X\big(\mathfrak{S}_{\bar r} M, \mathfrak{S}_{\bar r} N\big), \frac{1}{\bar r}\right\}. \tag{7}$$

Поскольку $\bar r^{\,-1} > \varepsilon$, то из (7) следует, что $\operatorname{dist}_X\big(\mathfrak{S}_{\bar r} M, \mathfrak{S}_{\bar r} N\big) \leqslant \varepsilon$. Таким образом, множество $\mathfrak{S}_{\bar r}\mathcal{N}(\varepsilon) = \big\{\mathfrak{S}_{\bar r} N : N \in \mathcal{N}(\varepsilon)\big\}$ образует конечную $\varepsilon$-сеть (относительно метрики $\operatorname{dist}$) для $\mathfrak{S}_{\bar r}\mathcal{M}$, и следовательно, $\mathfrak{S}_{\bar r}\mathcal{M}$ вполне ограничено.

б) Пусть теперь $\bar r > \varepsilon^{-1}$. Возьмем произвольное $\varepsilon_1 > 0$, удовлетворяющее неравенствам $\varepsilon_1^{-1} > \bar r > \varepsilon^{-1}$. Тогда $\bar r^{\,-1} > \varepsilon_1$ и $\varepsilon_1 < \varepsilon$. Согласно пункту а), для $\mathfrak{S}_{\bar r}\mathcal{M}$ существует конечная $\varepsilon_1$-сеть, множество $\mathfrak{S}_{\bar r}\mathcal{N}(\varepsilon_1) = \big\{\mathfrak{S}_{\bar r}K : K \in \mathcal{N}(\varepsilon_1)\big\}$, где $\mathcal{N}(\varepsilon_1)$ — конечная $\varepsilon_1$-сеть для множества $\mathcal{M}$. Следовательно, для любого $M \in \mathcal{M}$ найдется такое $K \in \mathcal{N}(\varepsilon_1)$, что $\operatorname{dist}_X\big(\mathfrak{S}_{\bar r}M, \mathfrak{S}_{\bar r}K\big) \leqslant \varepsilon_1 < \varepsilon$, то есть множество $\mathfrak{S}_{\bar r}\mathcal{N}(\varepsilon_1)$ является конечной $\varepsilon$-сетью для $\mathfrak{S}_{\bar r}\mathcal{M}$. Таким образом, $\mathfrak{S}_{\bar r}\mathcal{M}$ вполне ограничено в $(\operatorname{clos}(X), \operatorname{dist}_X)$ при любом $\bar r$.

Докажем обратное утверждение. Пусть выполнены свойства 1) и 2), покажем, что $\mathcal{M}$ вполне ограничено. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\bar r$, удовлетворяющее неравенствам $\bar r > 2\varepsilon^{-1}$ и $\bar r > c$. Множество $\mathfrak{S}_{\bar r}\mathcal{M}$ вполне ограничено в $(\operatorname{clos}(X), \operatorname{dist}_X)$ и для него существует конечная $2^{-1}\varepsilon$-сеть, которую обозначим через $\mathcal{N}_{\bar r}$. Тогда для любого $M \in \mathcal{M}$ найдется $N_{\bar r} \in \mathcal{N}_{\bar r}$ такое, что $\operatorname{dist}_X(\mathfrak{S}_{\bar r}M, N_{\bar r}) \leqslant 2^{-1}\varepsilon$. Оценим $\rho_X^{\mathrm{cl}}(M, N_{\bar r})$.

Прежде всего, из условия 1) и неравенства $\bar r > c$ следует, что $\varrho_X(\theta, M) = \varrho_X(\theta, \mathfrak{S}_{\bar r}M)$, а поскольку для любых $F, G \in \operatorname{clos}(X)$ и $x \in X$ выполнено

$$|\varrho_X(x, F) - \varrho_X(x, G)| \leqslant \operatorname{dist}_X(F, G)$$

(см., например, [4]), то

$$\rho_X^o(M, N_{\bar r}) = \rho_X^o(\mathfrak{S}_{\bar r}M, N_{\bar r}) = |\varrho_X(\theta, \mathfrak{S}_{\bar r}M) - \varrho_X(\theta, N_{\bar r})| \leqslant \operatorname{dist}_X(\mathfrak{S}_{\bar r}M, N_{\bar r}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, согласно лемме 1, функция $r \mapsto \operatorname{dist}_X(\mathfrak{S}_{\bar r}F, \mathfrak{S}_{\bar r}G)$ не убывает для любых $F, G \in \operatorname{clos}(X)$, поэтому, учитывая неравенство $\bar r^{-1} < 2^{-1}\varepsilon$ и оценку (2), получаем следующие соотношения:

$$\rho_X^{\mathfrak{S}}(M, N_{\bar r}) = \sup_{r>0} \min\left\{\operatorname{dist}_X\big(\mathfrak{S}_r M, \mathfrak{S}_r N_{\bar r}\big), \frac{1}{r}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \max\left\{\sup_{r\leqslant \bar r} \operatorname{dist}_X\big(\mathfrak{S}_r M, \mathfrak{S}_r N_{\bar r}\big),\ \sup_{r>\bar r}\frac{1}{r}\right\} = \max\left\{\operatorname{dist}_X\big(\mathfrak{S}_{\bar r} M, \mathfrak{S}_{\bar r} N_{\bar r}\big),\ \frac{1}{\bar r}\right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, $\rho_X^{\mathrm{cl}}(M, N_{\bar r}) \leqslant \varepsilon$, следовательно, $\mathcal{N}_{\bar r}$ является конечной $\varepsilon$-сетью для $\mathcal{M}$, и $\mathcal{M}$ вполне ограничено в пространстве $\big(\operatorname{clos}(X), \rho_X^{\mathrm{cl}}\big)$. □

В силу равенства (5) и определения (6) для $\rho_X^{\mathfrak{S}}$, непосредственно из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

С л е д с т в и е 1. *Множество* $\mathcal{M} \subset \big(\operatorname{clos}(X), \rho_X^{\mathrm{cl}}\big)$ *вполне ограничено тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) *существует* $c > 0$ *такое, что* $\varrho_X(\theta, M) \leqslant c$ *для любого* $M \in \mathcal{M}$ *и*

2) *множество*

$$\mathfrak{C}_{R(\bar r)}\mathcal{M} \doteq \{\mathfrak{C}_{R(\bar r)}M : M \in \mathcal{M}\},$$

*где* $R(\bar r)$ *определяется равенством* (4), *вполне ограничено в пространстве* $(\operatorname{clbd}(X), \operatorname{dist}_X)$ *при любом* $\bar r > c$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\mathcal{M} \subset \big(\operatorname{clos}(X), \rho_X^{\mathrm{cl}}\big)$. *Если существует такое* $c > 0$, *что* $\varrho_X(\theta, M) \leqslant c$ *для любого* $M \in \mathcal{M}$ *и множество*

$$\mathcal{M}_{\bar r} \doteq \{M \cap B_X(\bar r) : M \in \mathcal{M}\}$$

*вполне ограничено в пространстве* $(\operatorname{clbd}(X), \operatorname{dist}_X)$ *при любом* $\bar r > c$, *то множество* $\mathcal{M}$ *вполне ограничено.*

Д о к а з а т е л ь с т в о практически полностью повторяет доказательство достаточного условия теоремы 1 в силу очевидных равенств $\varrho_X(\theta, M) = \varrho_X(\theta, \mathfrak{S}_{\bar r}M) = \varrho_X(\theta, M \cap B_X(\bar r))$ и $\mathfrak{S}_{\bar r}M = \mathfrak{S}_{\bar r}(M \cap B_X(\bar r))$, выполненных для любого $\bar r > c$. □

Следует отметить, что утверждение, обратное теореме 2, неверно.

Как было отмечено ранее, если пространство $X$ — полное, то пространство $\big(\mathrm{clos}(X),\rho_X^{\mathrm{cl}}\big)$ также будет полным, поэтому для предкомпактности множества $\mathcal{M}\subset\big(\mathrm{clos}(X),\rho_X^{\mathrm{cl}}\big)$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{M}$ было вполне ограниченным (см., например, [5]). Имеет место также следующий критерий компактности.

Т е о р е м а 3. *Множество* $\mathcal{M}\subset\big(\mathrm{clos}(X),\rho_X^{\mathrm{cl}}\big)$ *компактно тогда и только тогда, когда* $\sup\limits_{M\in\mathcal{M}}\varrho_X(\theta,M)\leqslant c,\ \ c>0,$ *и для любого* $r>c$ *множество* $\mathfrak{S}_r\mathcal{M}\doteq\{\mathfrak{S}_rM:M\in\mathcal{M}\}$ *компактно в* $\big(\mathrm{clos}(X),\mathrm{dist}_X\big)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zhukovskiy E.S., Panasenko E.A.* On multi-valued maps with images in the space of closed subsets of a metric space // Fixed Point Theory and Applications 2013, 2013:10 doi:10.1186/1687-1812-2013-10.

2. *Жуковский Е.С., Панасенко Е.А.* Определение метрики пространства $\mathrm{clos}_\varnothing(X)$ замкнутых подмножеств метрического пространства $X$ и свойства отображений со значениями в $\mathrm{clos}_\varnothing(\mathbb{R}^n)$ // Математический сборник. 2014. Т. 205. № 9. С. 65–96.

3. *Жуковский Е.С., Панасенко Е.А.* Об одной метрике в пространстве непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 1. С. 15–25.

4. *Григоренко А.А., Панасенко Е.А.* Асимптотические свойства множеств решений дифференциальных включений. Тамбов: Издательский дом ТГУ им. Г.Р. Державина, 2009. 141 с.

5. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14-01-97504, № 14-01-00877).

Поступила в редакцию 15 апреля 2015 г.

Panasenko E.A. ON TOTALLY BOUNDED AND COMPACT SETS IN THE SPACE OF CLOSED SUBSETS OF A METRIC SPACE

The work continues the studies [1, 2] of the space $\mathrm{clos}(X)$ of non-empty closed subsets of a metric space $X$, the former being endowed with the metric $\rho_X^{\mathrm{cl}}$. In particular, the criteria of total boundedness and compactness of sets in $\big(\mathrm{clos}(X),\rho_X^{\mathrm{cl}}\big)$ are considered.

*Key words*: space of closed subsets of a metric space, totally bounded set, compact set.

Панасенко Елена Александровна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры алгебры и геометрии, e-mail: panlena_t@mail.ru

Panasenko Elena Aleksandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavina, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Algebra and Geometry Department, e-mail: panlena_t@mail.ru