УДК 517.983
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-437-440

# О НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА БЕСОВА–СОБОЛЕВА

© В. М. Тюрин

Изучается задача обратимости линейных дифференциальных операторов с частными производными типа Бесова.
*Ключевые слова:* корректный оператор; функциональные пространства.

В заметке приняты следующие обозначения. $X$ — банахово пространство с нормой $||\cdot||$; $L^p=L^p(\mathbb{R}^n,X)$ — лебеговы пространства сильно измеримых (по Бохнеру) функций $u:\mathbb{R}^n\to\to X$ с обычной нормой $||u||_0$ $(p>1)$; $B^p_\gamma$ — пространство функций $u\in L^p$, норма которых определяется равенством

$$||u||^p_\gamma=||u||_0+\langle u\rangle^p_\gamma,\ \langle u\rangle^p_\gamma=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{||u(x)-u(y)||^p}{|x-y|^{n+p\gamma}}dxdy\right)^{1/p}<\infty,\ 0<\gamma<1.$$

Пространство Соболева $H^m=H^m(\mathbb{R}^n,X)$ состоит из функций $u\in L^p$, которые имеют обобщенные производные $D^\alpha u\in L^p$ и норму

$$||u||_m=\sum_{|\alpha|\le m}||D^\alpha u||_0,\quad D^\alpha u=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}},\quad m\in\mathbb{Z}_+,$$

$|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — мультииндекс ([1], с. 60; [2], с. 31), пространство $B^p_{m\gamma}$ функций $u\in H^m$, норма которых находится по формуле

$$||u||^p_{m\gamma}=||u||_m+\langle u\rangle^p_{m\gamma},\ \langle u\rangle^p_{m\gamma}=\sum_{|\alpha|\le m}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{||D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)||^p}{|x-y|^{n+p\gamma}}dxdy\right)^{1/p},$$

$B^{pt}_{m\gamma}$ — пространство Бесова-Соболева ([2], с. 301; [3], с. 293; [4], с. 401) с нормой

$$||u||^{pt}_{m\gamma}=||u||_m+$$
$$+\sum_{k=1}^{t}\sum_{|\alpha|\le m}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{\left|\left|\sum\limits_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}C^{j-1}_{k-1}\triangle(y-x)D^\alpha u\big(x+(j-1)(y-x)\big)\right|\right|^p}{|y-x|^{n+p\gamma}}dxdy\right)^{1/p}=$$
$$=||u||_m+\langle u\rangle^{pt}_{m\gamma}<\infty:$$

$B^p_{m\gamma}=B^{p1}_{m\gamma}$. Отметим также, что разность $\triangle(z)u(x)=u(x+z)-u(x)$.

Рассмотрим функциональные пространства $G$ и $F\in L^p$ функций $u:\mathbb{R}^n\to X$ с нормами $||u||_G$, $||u||_F$. Предположим, что задан линейный ограниченный оператор $P:G\to F$ в частных производных $D^\alpha u\in L^p$. Производные $D^\alpha u$ понимаются в обобщенном смысле.

Оператор $P:G\to F$ назовем корректным, если найдется такая положительная постоянная $k=k(P,G,F)$, что выполняется неравенство

$$||u||_{G} \le k||Pu||_{F} \tag{1}$$

для всех $u\in G$ ([5], с. 165).

Построим гладкую финитную функцию $\varphi_1(x,\xi,T):\mathbb{R}^n\to[0,1]$ с носителем в шаре $B(\xi,2T)$, причем $\varphi_1(x,\xi,T)=1$, если $|D^\alpha\varphi_1|\le b_0T^{-1}$ ( $0<b_0$ не зависит от параметра $\xi\in\mathbb{R}^n$, $T\ge 2n$, $\alpha\neq 0$, то есть $\varphi_1\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ ) и $x\in B(\xi,T)$. Положим $\varphi_T(x)=\varphi_1(x,0,T)\varphi_1(0,T)=\varphi_1^2(x,0,T)$.

Л е м м а [6]. При $T\ge 2n$ справедливо неравенство

$$||\varphi_T u||^p_{m\gamma} \le aT^{-\gamma}||u||_m + a\langle u\rangle^p_{m\gamma}, \quad u\in B^p_{m\gamma}, \tag{2}$$

постоянная $a>0$ не зависит от $u$ и $T$.

Т е о р е м а. *Оператор $P:B^{pt}_{m\gamma}\to B^p_\gamma$ корректен тогда и только тогда, когда корректен оператор $P:B^p_{m\gamma}\to B^p_\gamma$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть корректен оператор $P:B^{pt}_{m\gamma}\to B^p_\gamma$. Предположим, что оператор $P:B^p_{m\gamma}\to B^p_\gamma$ не является корректным. В этом случае можно найти последовательность $u_j\in B^p_{m\gamma}$ такую, что

$$\lim_{j\to\infty}||Pu_j||^p_\gamma=0, \quad \lim_{j\to\infty}||u_j||^p_{m\gamma}=1. \tag{3}$$

Так как $\varphi(x,T)u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$P(\varphi_T u)=\varphi_T Pu+Q(u,\varphi_T), \tag{4}$$

$\varphi_T u\in B^{pt}_{m\gamma}$, то из (4) следует

$$||\varphi_T u||^{pt}_{m\gamma}\le k_1||\varphi_T Pu||^p_\gamma+k_1||Q(u,\varphi_T)||^p_\gamma.$$

Выражение $Q(u,\varphi_T)$ есть некоторый линейный дифференциальный оператор в частных производных порядка не более $n-1$ по переменной $u$, коэффициенты которого финитны и подчиняются следующей оценке:

$$||Q(u,\varphi_T)||^p_\gamma\le a_1T^{-1}||u||_m+a_2T^{-1}\langle u\rangle^p_{m\gamma}, \tag{5}$$

постоянные $a_1>0$, $a_2>0$ не зависят от $u$ и $T$. Отметим, что из (5) следует

$$\lim_{T\to\infty}||Q(u,\varphi_T)||^p_\gamma=0. \tag{6}$$

Далее воспользуемся следующими соотношениями

$$\lim_{T\to\infty}||(\varphi_T Pu)||_0=||Pu||_0, \quad \lim_{T\to\infty}||(\varphi_T Pu)||^p_\gamma\le b_1||Pu||^p_\gamma, \quad \lim_{T\to\infty}||(\varphi_T u)||^p_{m\gamma}=||u||^p_{m\gamma}. \tag{7}$$

Учитывая (6) и (7) будем иметь ( $b_1>0$ не зависит от $u$ и $T$ )

$$1=||u||^p_{m\gamma}=\lim_{T\to\infty}||(\varphi_T u)||^p_{m\gamma}\le\lim_{T\to\infty}||(\varphi_T u)||^{pt}_{m\gamma}\le k_1\lim_{T\to\infty}||(\varphi_T Pu)||^p_\gamma+$$
$$+k_1\lim_{T\to\infty}||Q(u,\varphi_T)||^p_\gamma\le b_1k_1||Pu||^p_\gamma, \quad \text{т.е.}$$
$$1\le k_1b_1||Pu||^p_\gamma.$$

Последнее неравенство противоречит (3). Следовательно, оператор $P:B^p_{m\gamma}\to B^p_\gamma$ корректен (1).

В другую сторону. Допустим, что оператор $P: B^p_{m\gamma} \to B^p_\gamma$ корректен. В выражение

$$A(\varphi_{T}u) = \sum_{k=1}^{t} \sum_{|\alpha|\leq m} \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{\left\|\sum\limits_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}C_{k-1}^{j-1}\triangle(y-x)D^{\alpha}\begin{pmatrix}\varphi_{T}\big(x+(j-1)\big)\times\\ \times u\big(x+(j-1)(y-x)\big)\end{pmatrix}\right\|^p}{|y-x|^{n+p\gamma}}dxdy\right)^{1/p}$$

сделаем замену переменных по формулам $x=(1-j)z_j+jw_j$, $y=(2-j)z_j+(j-1)w_j$, $0\neq \frac{\partial(x,y)}{\partial(z_j,w_j)} \leq a_3$, $a_3$ не зависит от $j$. После замены получим

$$A(\varphi_{T}u) \leq$$

$$= a_3\sum_{k=1}^{t}\sum_{|\alpha|\leq m}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{\left\|\begin{matrix}\sum\limits_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}C_{k-1}^{j-1}\big(D^{\alpha}\varphi_{T}(z_j)u(z_j)\big)-\\ -D^{\alpha}\big(\varphi_{T}(w_j)u(w_j)\big)\end{matrix}\right\|^p}{|z_j-w_j|^{n+p\gamma}}dz_jdw_j\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq a_3\sum_{k=1}^{t}\sum_{|\alpha|\leq m}\left(2^k\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{\big|\big|\big(D^{\alpha}\varphi_{T}(z_j)u(z_j)\big)-D^{\alpha}\big(\varphi_{T}(w_j)u(w_j)\big)\big|\big|^p}{|z_j-w_j|^{n+p\gamma}}dz_jdw_j\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq a_3t2^{t+1}\langle\varphi_{T}u\rangle^p_{m\gamma}.$$

Согласно лемме (2)

$$A\langle\varphi_{T}u\rangle \leq a_3t2^{t+1}\langle\varphi_{1T}^2(\varphi_{1T}^2u)\rangle^p_{m\gamma} \leq 2^{t+1}aa_3t\langle\varphi_{1T}^2u\rangle^p_{m\gamma}+ \\ +2^{t+1}aa_3tT^{-\gamma}||\varphi_{1T}^2u||_m = a_4\langle\varphi_{1T}^2u\rangle^p_{m\gamma}+a_4T^{-\gamma}||\varphi_{1T}^2u||_m, \quad a_4=2^{t+1}aa_3t. \tag{8}$$

Так как оператор $P: B^p_{m\gamma} \to B^p_\gamma$ корректен, то

$$||\varphi_{1T}^2u||_m \leq (k_1+b_2k_1T^{-2\gamma})||Pu||_0+b_3k_1T^{-1}||u||_m+ \\ +b_4k_1\langle Pu\rangle^p_\gamma+b_5k_1T^{-\gamma}\langle u\rangle^p_{m\gamma} \quad \text{и}$$

$\langle\varphi_{1T}^2u\rangle^p_{m\gamma} \leq a\langle u\rangle^p_{m\gamma}+aT^{-\gamma}||u||_m$, $b_3-b_5$ некоторые положительные постоянные не зависящие от $u$ и $T$. Следовательно, из (8) получаем

$$A\langle\varphi_{T}u\rangle \leq a_4T^{-\gamma}(k_1+b_2k_1T^{-2\gamma})||Pu||_0+b_4k_1\langle Pu\rangle^p_\gamma+ \\ +b_3k_1T^{-1}||u||_m+b_5k_1T^{-\gamma}\langle u\rangle^p_{m\gamma}+a_4T^{-\gamma}||u||_m+a_4\langle u\rangle^p_{m\gamma}.$$

Отсюда

$$\lim_{T\to\infty}A\langle\varphi_{T}u\rangle = a_4\langle u\rangle^p_{m\gamma}+b_4k_1\langle Pu\rangle^p_\gamma.$$

Поскольку

$$\lim_{T\to\infty}||(\varphi_{T}u)||^p_{m\gamma} = \lim_{T\to\infty}||(\varphi_{T}u)||_m+\lim_{T\to\infty}A(\varphi_{T}u) = ||u||_m \pm a_4\langle u\rangle^p_{m\gamma}+ \\ +b_4k_1 < \langle Pu\rangle^p_\gamma \leq (a_4+b_4)k_1||Pu||^p_\gamma, \quad \text{то}$$

$||u||^{pt}_{m\gamma} \leq (a_4+b_4)k_1||Pu||^p_\gamma$, т. е. оператор $P: B^{pt}_{m\gamma} \to B^p_\gamma$ корректен.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 3-е изд., доп. и перераб. М.: Наука, 1988. 336 с.
2. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы М. Тейлор. М.: Мир, 1985. 472 с.
3. *Бесов О.В., Ильин В.П.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1975. 480 с.
4. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с.
5. *Левитан Б.М., Жиков В.В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978. 204 с.
6. *Кузнецова Т.Б., Тюрин В.М.* Материалы всероссийской научной конференции. Липецк, 2007. Т. 1. 230 с.

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Тюрин Василий Михайлович, Липецкий государственный педагогический университет, г. Липецк, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики, e-mail: tvmla@yandex.ru

UDC 517.983
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-437-440

## ABOUT SOME LINEAR DIFFERENTIAL OPERATORS IN THE SPACES OF BESOV-SOBOLEV TYPE

© V. M. Tyurin

The problem of invertibility of linear differential operators with partial derivatives of Besov type is studied.
*Key words:* well-posed operator, functional spaces.

REFERENCES

1. *Sobolev S.L.* Nekotorye primeneniya funkcional’nogo analiza v matematicheskoy fizike. 3-e izd., dop. i pererab. M.: Nauka, 1988. 336 s.
2. *Teylor M.* Psevdodifferencial’nye operatory M. Teylor. M.: Mir, 1985. 472 s.
3. *Besov O.V., Il’in V.P.* Integral’nye predstavleniya funkciy i teoremy vlozheniya. M., 1975. 480 s.
4. *Tribel’ H.* Teoriya interpolyacii, funkcional’nye prostranstva, differencial’nye operatory. M.: Mir, 1980. 664 s.
5. *Levitan B.M., ZHikov V.V.* Pochti periodicheskie funkcii i differencial’nye uravneniya. M.: Izd-vo MGU, 1978. 204 s.
6. *Kuznecova T.B., Tyurin V.M.* Materialy vserossiyskoy nauchnoy konferencii. Lipeck, 2007. T. 1. 230 s.

Received 21 March 2016.

Tyurin Vasily Mikhaylovich, Lipetsk State Pedagogical University, Lipetsk, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematics Department, e-mail: tvmla@yandex.ru