ISSN 1810-0198. Вестник ТГУ, т.20, вып.6, 2015

УДК 519.9:532

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПРИМЕНЕНИИ ЧЕТНОГО И НЕЧЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ–БЕССЕЛЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© Л.Б. Райхельгауз

Ключевые слова: полное преобразование Фурье–Бесселя; четная и нечетная составляющая; сингулярные дифференциальные уравнения.

Рассмотрено обыкновенное дифференциальное уравнение с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя. Для исследования возможных решений применяется «полное преобразование Фурье–Бесселя», введенное И.А. Киприяновым и В.В. Катраховым. Методика исследований проверяется на известных решениях полигармонического оператора и B-полигармонического оператора.

Известно, что при исследовании задач теории функций и дифференциальных уравнений с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя

$$B=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2p+1}{x}\frac{d}{dx},\qquad p>-\frac{1}{2}$$

(или оператором типа $\frac{p}{x}\frac{d}{dx}$) роль преобразований Фурье с успехом выполняет преобразование Фурье–Бесселя следующего вида [1–2].

$$F_B\left[f(x)\right](\xi)=\int_0^\infty f(x)\,j_p(x\xi)\,x^{2p+1}dx, \tag{1}$$

Обратное преобразование определяется равенством

$$F_B^{-1}\left[g(\xi)\right](x)=\frac{1}{2^{2p}\Gamma^2(p+1)}F_B\left[g(x)\right](\xi), \tag{1'}$$

В этих равенствах ядро $j_p(x)$ – j-функция Бесселя, связанная с функцией Бесселя первого рода $J_p(x)$ равенством

$$j_p(x)=2^p\,\Gamma(p+1)\frac{J_p(x)}{x^p}. \tag{2}$$

Но *j*-функция Бесселя – четная функция, и поэтому преобразование (1) применяется лишь для работы с четными функциями f (как косинус-преобразование Фурье.) Другое сильное ограничение для применения преобразования (1) – оно приспособлено лишь для операторов «четного порядка» типа B_x^m [3; 4]. Ситуация, когда в уравнении присутствуют «нечетные» производные (например, градиент функции), не такая уж редкая, скорее наоборот, поскольку эта ситуация более общая. Мы используем введенное И.А. Киприяновым и В.В. Катраховым в работе [1] преобразование Фурье–Бесселя общего вида, ядро которого содержит «четное» $j_p(x)$ и «нечетное» $i\frac{x}{2(p+1)}j_{p+1}(x)$ свои составляющие.

Практическое применение общего преобразования Фурье–Бесселя потребует следующие факты: обратимость общего преобразования Фурье–Бесселя в соответствующем классе весовых распределений; формулы представления дифференциальных операций в образах Фурье–Бесселя.

Общее прямое и обратное преобразование Фурье–Бесселя введем по формулам, соответственно

$$\Im_B\left[f(x)\right](\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Lambda_p^+(x\xi)\left(x^2\right)^{p+1/2}dx \tag{3}$$

$$\Im_B^{-1}\left[f(x)\right](\xi)=\frac{1}{2^{2p+1}\Gamma^2(p+1)}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Lambda_p^-(x\xi)\times\left(x^2\right)^{p+\frac{1}{2}}dx, \tag{4}$$

где $\Lambda_p^\pm=j_p(x\xi)\mp i\frac{x\xi}{2(p+1)}j_{p+1}(x\xi)$.

Заметим, что здесь, в отличие от работы [1], мы используем нормирующий коэффициент $\frac{1}{2(p+1)}$ перед нечетной составляющей ядра. Это сделано для удобства работы с дифференциальными операторами.

Теорема 1 (теорема обращения [4]).

Пусть $f\in L_2^p\left(R_1^+\right)$. Тогда имеет место формула обращения

$$\Im_B^{-1}\left[\Im_B\left[f\right]\right]=f;\quad \Im_B\left[\Im_B^{-1}\left[f\right]\right]=f. \qquad (5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для четных функций формула обращения получена И.А. Киприяновым [2]. Поэтому нам достаточно доказать формулу обращения в случае применения преобразования Фурье–Бесселя к нечетной функции. Так же, как и в [2], мы используем формулу обращения преобразования Ганкеля

$$H_p\left[f\right](\xi)=\int_0^\infty (x\xi)^{1/2} J_p(x\xi) f(x)\,dx=\hat f(\xi), \qquad (6)$$

$$H_p^{-1}\left[f\right](x)=\int_0^\infty (x\xi)^{1/2} J_p(x\xi)\hat f(\xi)\,d\xi=f(x). \qquad (7)$$

В случае применения преобразования Фурье–Бесселя к нечетной функции формулу (5) рассмотрим на основе функции J_{p+1}. Заменим функцию Бесселя первого рода J_{p+1} нормированной функцией Бесселя j_{p+1} по формуле (2), а функцию f – на функцию $x^{p+1/2} f(x)$. Тогда получим

$$\left(x^{p+1/2}\hat{} f\right)(\xi)=\frac{\xi^{p+1/2}}{2^p\Gamma(p+1)}\int_0^\infty x^{2p+1}\frac{x\xi}{2(p+1)}j_{p+1}\times$$
$$\times(x\xi)\, f(x)\,dx=\frac{\xi^{p+1/2}}{2^p\Gamma(p+1)}\hat f(\xi).$$

Обращая полученное равенство по формуле (7), имеем

$$x^{p+1/2} f(x)=\frac{x^{p+1/2}}{2^p\Gamma(p+1)}\int_0^\infty \frac{x\xi}{2(p+1)}j_{p+1}\times$$
$$\times(x\xi)\hat f(\xi)\xi^{2p+1}d\xi.$$

Если предположить функцию f нечетной, то, распространяя интегрирование по всей прямой, из этого и предыдущего рассуждений получаем две формулы

$$\hat f(\xi)=$$
$$=\frac{1}{2^{p+1}\Gamma(p+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\xi}{2(p+1)}j_{p+1}(x\xi)\, f(x)\, x^{2p+1}dx;$$
$$f(x)=$$
$$=\frac{1}{2^{p+1}\Gamma(p+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\xi}{2(p+1)}j_{p+1}(x\xi)\,\hat f(\xi)\,\xi^{2p+1}dx,$$

которые и представляют собой формулы нечетного преобразования Фурье–Бесселя и ее обращения. Аналогично доказывается второе из равенств (5).

Доказательство закончено.

На основе аналогичной теоремы Планшереля для преобразования Ганкеля [6] получена формула Планшереля–Парсеваля для полного преобразования Фурье–Бесселя $(f,g)_p=\left(\Im_B[f],\Im_B[g]\right)_p, \|f\|_{L_2^p}=\|\Im_B[f]\|_{L_2^p}$. Далее в работе она не используется, поэтому ее доказательство в этой работе не приводим.

Дифференциальные операции с оператором Бесселя. Введем обозначение: $\frac{d}{dx}=D.$ В этих обозначения оператор Бесселя запишем следующим образом

$$B=D^2+\frac{2p+1}{x}D,\quad p>-1/2.$$

Пусть f – четная по x функция, принадлежащая пространству Шварца основных функций. Тогда

$$\Im_B\left[Bf\right](\xi)=-\xi^2\Im_B\left[f\right](\xi); \qquad (8)$$

$$\Im_B\left[Df\right](\xi)=i\xi\Im_B\left[f\right](\xi). \qquad (9)$$

Действительно, для четной составляющей преобразования $\Im_B$ равенство $F_B[Bf]=-\xi^2F_B\left[f\right]$ известно [2]. Но отсюда сразу вытекает равенство $\Im_B\left[Bf\right]=-\xi^2\Im_B\left[f\right]$.

Рассмотрим нечетную составляющую в равенстве (4). Имеем

$$\Im_B\left[Df\right]=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ix\xi}{2(p+1)}j_{p+1}(x\xi)Df(x)\left(x^2\right)^{p+1/2}dx=$$
$$=-\frac{2i}{\xi}\int_0^\infty D\, j_p(x\xi)Df(x)\left(x^2\right)^{p+1/2}dx.$$

Интегрируя по частям, получим $\Im_B\left[Df\right]=\frac{2i}{\xi}\int_0^\infty D\left(x^{2p+1}D\,j_p(x\xi)\right)f(x)dx.$ Учитывая, что $\frac{1}{x^{2p+1}}D\left(x^{2p+1}D\right)=B$ и $Bj_p(x\xi)=-\xi^2 j_p(x\xi)$, получаем $\Im_B[Df]=2i\xi F_B[f](\xi)$.

Теперь, распространяя интегрирование на $(-\infty,+\infty)$ и добавляя нечетную составляющую преобразования $\Im_B$, получим формулу (9).

Как следствие формул (8) и (9) получаем для целого числа m

$$\Im_B\left[B^m f\right](\xi)=(i\xi)^{2m}\Im_B\left[f\right](\xi); \qquad (10)$$

$$\Im_B\left[DB^m f\right](\xi)=(i\xi)^{2m+1}\Im_B\left[f\right](\xi). \qquad (11)$$

Пусть $L\left(D_B\right)=\sum\limits_{\alpha\le 2m} a_\alpha D_B^\alpha$, где a_α – постоянные коэффициенты и оператор D_B^α задается равенством

$$D_B^\alpha=\begin{cases} B^m, & \alpha=2m \\ \dfrac{d}{dx}B^m, & \alpha=2m+1 \end{cases} \qquad m=0,1,2,\ldots,$$

тогда из (10), (11) следует, что в образах полного преобразования Фурье–Бесселя действие этого оператора примет вид

$$\Im_B\left[L\left(D_B\right)f\right]\left(\xi\right)=L\left(i\xi\right)\Im_B\left[f\right]\left(\xi\right).$$

В этой формуле заложено начало нового операционного исчисления, но оно имеет одну странную особенность. Применение этого оператора возможно только к четным функциям.

Введем весовую линейную форму

$$\left(f,g\right)_p=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)g\left(x\right)x^{2p+1}dx, \qquad (12)$$

которую при необходимости будем понимать в смысле главного значения.

Через $L_2^p\left(R_1^+\right)$ будем обозначать множество четных по переменной x функций f, для которых $f\left(x\right)x^{(2p+1)/2}\in L_2\left(R_1\right)$. Норму элементов в этом пространстве зададим равенством $\left\|f\right\|_{L_2}^p=\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x\right)\right|^2 x^{2p+1}dx\right]^{1/2}$.

С этой нормой пространство $L_2^p\left(R_1^+\right)$ – банахово [2].

Теорема 2. Пусть регулярная весовая обобщенная функция f принадлежит пространству медленно растущих распределений $S^/$, а функция $\dfrac{1}{L\left(i\xi\right)}$ является мультипликатором этого пространства, тогда весовая обобщенная функция $u\left(x\right)=\Im_B^{-1}\left[\dfrac{\Im_B\left[f\right]\left(\xi\right)}{L\left(i\xi\right)}\right]\left(x\right)$ является решением уравнения $L\left(D_B\right)u=f$.

Доказательство основано на непосредственной подстановке решения в последнее уравнение.

Теорема 3 [7]. Пусть $\Phi\left(R_N^+\right)$ – основное пространство функций с непрерывным обобщенным сдвигом, F_B и F_B^{-1} – прямое и обратное преобразования Фурье–Бесселя и $\Psi\left(R_N^+\right)=\left\{\psi=F_B\left[\phi\right],\phi\in\Phi\left(R_N^+\right)\right\}$.

Если регулярное распределение g является мультипликатором в пространстве $\Psi\left(R_N^+\right)$, то распределение $F^{-1}\left[g\right]=f$ – обобщенный свертыватель в пространстве $\Phi'\left(R_N^+\right)$, и для любого распределения $f_1\in\Phi'\left(R_N^+\right)$ имеет место формула $F_B\left[\left(f*f_1\right)_\gamma\right]=F_B\left[f\right]F_B\left[f_1\right]$.

Из теоремы 2 и из теоремы 3 вытекает следующая теорема.

Теорема 4. Пусть регулярная весовая обобщенная функция f принадлежит пространству медленно растущих распределений S'**,** а функция $\dfrac{1}{L\left(i\xi\right)}$ является мультипликатором этого пространства. Тогда решение уравнения $L\left(D_B\right)u=f$ имеет следующее представление в виде обобщенной свертки

$$u\left(x\right)=\int\limits_0^\infty \Im_{ev}^{-1}\left[\Im_B\left[f\right]\right]\left(y\right)T^x\left(\Im_{ev}^{-1}\left[\frac{1}{L\left(i\xi\right)}\right]\right)\left(y\right)y^\gamma dy,$$

где T^x – обобщенный сдвиг:

$$\left(T^y f\right)\left(x\right)=\frac{\Gamma\left(p+1\right)}{\Gamma\left(p+1/2\right)\Gamma\left(1/2\right)}\times\int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\times\sin^{2p}\alpha\, d\alpha.$$

ОБЫКНОВЕННЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть $S_{ev}\left(R_1\right)$ – основное пространство функций, состоящих из четных функций пространства Л. Шварца. Через $S_{ev}^/$ обозначим соответствующее весовой линейной форме (12) множество обобщенных функций над S_{ev}. Пусть δ_γ – весовое распределение Дирака, действующее по формуле

$$\left(\delta_\gamma,\phi\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta_\gamma\left(x\right)\phi\left(x\right)x^{2p+1}dx=\phi\left(0\right).$$

Фундаментальным решением оператора $L\left(D_B\right)$ называется весовое распределение $\varepsilon\left(x\right)$, удовлетворяющее уравнению

$$L\left(D_B\right)\ \varepsilon=\delta, \qquad (13)$$

т. е. для любого ϕ, принадлежащего $S_{ev}\left(R_1\right)$, выполнено равенство

$$\left(L\left(D_B\right)\varepsilon,\phi\right)_\gamma=\phi\left(0\right).$$

Лемма 1. Для того чтобы обобщенная функция $u = \varepsilon \in S_{ev}^{/}$ была фундаментальным решением оператора $L\left(D_B\right)$, необходимо и достаточно, чтобы ее четное преобразование Фурье–Бесселя удовлетворяло уравнению

$$L\left(i\xi\right)F_B\left[\varepsilon\right]\left(\xi\right) = 1, \tag{14}$$

где $L\left(\xi\right) = \sum_{\alpha=0}^{2m} a_\alpha \xi^\alpha$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киприянов И.А., Катрахов В.В.* Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // Мат. сборник. 1977. Т. 104. № 1. С. 49-68.
2. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997. 199 с.
3. *Левитан Б.М.* Операторы обобщенного сдвига и некоторые их приложения. М.: ГИФМЛ, 1962. 323 с.
4. *Ляхов Л.Н., Ляхова С.Л.* Общее преобразование Фурье–Бесселя и сингулярные системы уравнений Навье–Стокса // ДАН. 2004. Т. 399. № 2. С. 157-162.
5. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. 152 с.
6. *Бохнер А.М.* Лекции об интегралах Фурье. М.: ГИФМЛ, 1962. 360 с.
7. *Ляхов Л.Н.* О свертывателях и мультипликаторах классов функций, связанных с преобразованием Фурье–Бесселя // ДАН. 1998. Т. 360. № 1.

Поступила в редакцию 22 июня 2015 г.

Raihelgauz L.B. INFORMATION ABOUT USE OF EVEN AND ODD TRANSFORMATION OF FOURIER-BESSEL TO STUDY SOME SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATION

The ordinary differential equation with singular differential operator of Bessel is considered. To research possible decisions “full transformation of Fourier-Bessel” introduced by I.A. Kipriyanov and V.V. Katrakhov is applied. The methods of researches is checked on known decisions of poligarmonic operator and the B-polyharmonious operator.

Key words: full transformation of Fourier-Bessel; even and odd component; singular differential equations.

Райхельгауз Леонид Борисович, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, e-mail: jikol_85@mail.ru

Raihelgauz Leonid Borisovich, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Equation in Particular Derivative and Theory of Probability Point Department, e-mail: jikol_85@mail.ru