УДК 517.923
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2146-2151

РЕШЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ, СОДЕРЖАЩЕЕ ОПЕРАТОР БЕССЕЛЯ ПО ВСЕМ ПЕРЕМЕННЫМ

© О.П. Барабаш, Э.Л. Шишкина
Воронежский государственный университет
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: ilina_dico@mail.ru

Приведено решение задачи Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу для случая, когда параметр оператора Бесселя, действующего по времени, принимает любые вещественные значения.
Ключевые слова: уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу; оператор Бесселя

Классическое уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t},\quad u=u(x,t), \qquad (1)$$
$$x\in \mathrm{P}_n,\quad t>0,\quad -\infty<k<\infty.$$

Оператор, действующий по переменной t в (1), называется **оператором Бесселя**, и для него принято обозначение $(B_k)_t=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}+\dfrac{k}{t}\dfrac{\partial}{\partial t}$ [1, с. 3].

Уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу при $n=1$ впервые было рассмотрено Л. Эйлером [2, р. 227] и позднее исследовано С.Д. Пуассоном [3], Б. Риманом [4] и Ж. Дарбу [5; 6, с. 532, 7, с. 527]. Многомерное уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (1) рассмотрено, например, в [8–9]. В [10; 11, р. 243; 12] рассмотрены различные подходы к решению задачи Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу вида

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (2)$$
$$0<\gamma_i,\qquad i=1,\ldots,n,$$

$$u(x,0)=f(x),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \qquad (3)$$

В приведенных работах не было получено решение (2)–(3) при $k=-1,-3,-5,\ldots$. В этой статье мы рассмотрим подход к решению задачи (2)–(3), отличный от подходов, использующихся в [10] и в [11] при всех $-\infty<k<+\infty$.

Пусть $\mathrm{R}_n^+=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in \mathrm{R}_n, x_1>0,\ldots,x_n>0\}$ и Ω открытое множество в R_n, симметричное относительно каждой гиперплоскости $x_i=0$, $i=1,\ldots,n$, $\Omega_+=\Omega\cap \mathrm{P}_n^+$ и $\overline{\Omega}_+=\Omega\cap\overline{\mathrm{R}}_n^+$, где $\overline{\mathrm{R}}_n^+=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in \mathrm{R}_n, x_1\ge 0,\ldots,x_n\ge 0\}$. Имеем $\Omega_+\subseteq \mathrm{R}_n^+$ и $\overline{\Omega}_+\subseteq\overline{\mathrm{R}}_n^+$. Рассмотрим множество $C^m(\Omega_+)$, $m\in N\cup\{\infty\}$. Через $C^m(\overline{\Omega}_+)$ обозначим подмножество функций из $C^m(\Omega_+)$ таких, что все существующие производные этих функций по x_i для любого $i=1,\ldots,n$ непрерывно продолжаются на $x_i=0$. Функции $f\in C^m(\overline{\Omega}_+)$ мы будем называть **четными по переменной** x_i, $i=1,\ldots,n$, если $\left.\dfrac{\partial^{2k+1}f}{\partial x_i^{2k+1}}\right|_{x=0}=0$ для всех неотрицательных целых $k\le\dfrac{m-1}{2}$ [1, с. 21]. Класс $C_{ev}^m(\overline{\Omega}_+)$ состоит из функций из $C^m(\overline{\Omega}_+)$, четных по каждой из своих переменных x_i, $i=1,\ldots,n$. Мультииндекс $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ состоит из положительных фиксированных чисел $\gamma_i>0$, $i=1,\ldots,n$ и $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$.

В статье будем рассматривать многомерное уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу, в котором по каждой переменной действует оператор Бесселя:

$$\Delta_\gamma u(x,t)=(B_k)_t u,\quad -\infty<k<\infty,$$
$$u=u(x,t),\quad x\in \mathrm{P}_n^+,\quad t>0, \qquad (4)$$

где

$$\Delta_\gamma=\sum_{i=1}^{n}(B_{\gamma_1})_{x_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x}, \qquad (5)$$

$$(B_k)_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad k \in \mathrm{R}.$$

Обозначим через $u^k = u^k(x,t)$ решение уравнения (4). Для решения уравнения (4) имеют место две фундаментальные **рекуррентные формулы**

$$u^k = t^{1-k} u^{2-k}, \tag{6}$$

$$u_t^k = t u^{k+2}. \tag{7}$$

Эти рекуррентные формулы позволят при помощи решения u^k уравнения (4) получить решение того же уравнения, но с параметром $k+2$ и $2-k$ соответственно. Обе формулы присутствуют в статье А. Вайнштейна [13], но для частного случая. Формула (6) доказана в [10]. Формула (7) доказывается аналогично формуле для решения классического уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу [13]. В монографии [11] приведены обобщения соотношений (6)–(7) и подобных соотношений для случая более общих уравнений, которые, однако, не включают рассмотренные в данной работе случаи.

В пространстве R_n^+ применяется многомерный обобщенный сдвиг, отвечающий мультииндексу γ вида ${}^{\gamma}T^t = {}^{\gamma_1}T_{x_1}^{t_1} \ldots {}^{\gamma_n}T_{x_n}^{t_n}$, где каждый из одномерных обобщенных сдвигов определен выражением

$${}^{\gamma_i}T_{x_i}^{\tau_i} : f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \times$$
$$\times \int_0^{\pi} f(x_1,\ldots,x_{i-1}\sqrt{x_i^2+\tau_i^2-2x_i\tau_i\cos\alpha_i}, x_{i+1},\ldots,x_n)\sin^{\gamma_i-1}\alpha_i\, d\alpha_i.$$

На основе смешанного обобщенного сдвига ${}^{\gamma}T^t$ конструируется весовое сферическое среднее функции f:

$$M_f^{\gamma}(x;t) = \frac{1}{|S_1^+(n)|_{\gamma}} \int_{S_1^+(n)} {}^{\gamma}T_x^{t\theta} f(x;y)\theta^{\gamma} dS, \tag{8}$$

где $\theta^{\gamma} = \prod_{i=1}^{n} \theta_i^{\gamma_i}$, $S_1^+(n) = \{\theta : |\theta| = 1, \theta \in \mathrm{P}_n^+\}$, а $|S_1^+(n)|_{\gamma}$ вычисляется по формуле:

$$|S_1^+(n)|_{\gamma} = \int_{S_1^+(n)} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\gamma_i} dS(y) = \frac{\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \tag{9}$$

[14, с. 20, формула (1.2.5)], где надо положить $N = n$). Конструкции многомерного обобщенного сдвига и весового сферического среднего представляют собой операторы преобразования [15–16].

В [17] доказано, что весовое сферическое среднее любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $f = f(x)$, четной по каждой из своих независимых переменных $x_1,\ldots,x_n$, удовлетворяет задаче Коши

$$(\Delta_{\gamma})_x M_f^{\gamma}(x;t) = (B_k)_r M_f^{\gamma}(x;t), \quad k = n + |\gamma| - 1 \tag{10}$$

$$M_f^{\gamma}(x;0) = f, \quad \frac{\partial}{\partial t} M_f^{\gamma}(x;t)|_{t=0} = 0. \tag{11}$$

Будем искать решение задачи Коши

$$\Delta_{\gamma} u = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{12}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = 0. \tag{13}$$

Пусть $k > n + |\gamma|$, $\gamma' = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\gamma_{n+1}')$, $\gamma_{n+1}' > 0$. Рассмотрим уравнение вида

$$\Delta_{\gamma'} u = (B_{\gamma_1})_{x_1} u + \ldots + (B_{\gamma_n})_{x_n} u + (B_{\gamma_{n+1}'})_{x_{n+1}} =$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t}$$

с начальными условиями $u(x_1,\ldots,x_{n+1},0) = f_1(x_1,\ldots,x_{n+1})$, $u_t(x_1,\ldots,x_{n+1},0) = 0$. Здесь $x' = (x_1,\ldots,x_{n+1}) \in \mathrm{R}_{n+1}^+$. При $k = n + |\gamma'| = n + |\gamma| + \gamma_{n+1}'$ решением этой задачи Коши является весовое сферическое среднее $M_{f_1}^{\gamma'}(x';t)$:

$$u(x_1,\ldots,x_{n+1},t) = \frac{1}{|S_1^+(n+1)|_{\gamma'}} \times$$
$$\times \int_{S_1^+(n+1)} [{}^{\gamma_1}T^{ty_1} \ldots {}^{\gamma_n}T^{ty_n}\, {}^{\gamma_{n+1}'}T^{ty_{n+1}} f_1(x)](y')^{\gamma'} dS_{y'}, \tag{14}$$
$$y' = (y_1,\ldots,y_n,y_{n+1}') \in \mathrm{R}_{n+1}^+,$$
$$|S_1^+(n+1)|_{\gamma'} = \frac{\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.$$

Положим $f_1(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0) = f(x_1,\ldots,x_n)$, где f – функция из начального условия (13). Таким образом, u, определяемая формулой (14), оказывается функцией, зависящей только от $x_1,\ldots,x_n$, удовлетворяющей уравнению (12) и условиям (13). Имеем

$$u^k(x,t) = \frac{1}{|S_1^+(n+1)|_{\gamma'}} \int_{S_1^+(n+1)} [{}^{\gamma}T^{ty} f(x)](y')^{\gamma'} dS_{y'}.$$

Перепишем теперь интеграл по части сферы $S_1^+(m)$ в виде интеграла по части сферы $S_1^+(n)$. Запишем поверхностный интеграл через кратный интеграл:

$$\int\limits_{S_1^+(n+1)} [{}^\gamma T^{ty} f(x)](y')^{\gamma'} dS_{y'} =$$

$$= \int\limits_{B_1^+(n)} [{}^\gamma T^{ty} f(x)](1-|y|^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} y^\gamma dy,$$

где $B_1^+(n) = \{y \in R_n^+ : \sum_{i=1}^n y_i^2 \le 1\}$ – проекция $S_1^+(n+1)$ на экваториальную плоскость $x_{n+1} = 0$. Имеем

$$u^k(x,t) = \frac{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right)}{2^n \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \times$$

$$\times \int\limits_{B_1^+(n)} [{}^\gamma T^{ty} f(x)](1-|y|^2)^{\frac{k-n-|\gamma|-1}{2}} y^\gamma dy. \qquad (15)$$

Хотя (15) было получено как решение задачи (12)–(13) при $k > n+|\gamma|$ непосредственная подстановка (15) в (12)–(13) при $n+|\gamma|-1 < k \le n+|\gamma|$ дает, что (15) является решением (12)–(13) и при $n+|\gamma|-1 < k \le n+|\gamma|$.

В случае, когда $k < n+|\gamma|-1$, $k \ne -1,-3,-5,\ldots$, используем рекуррентные формулы (6) и (7). Выберем положительное целое число m такое, что $k+2m \ge n+|\gamma|-1$. Найдем решение задачи Коши

$$\Delta_\gamma u^{k+2m} = u_{tt}^{k+2m} + \frac{k+2m}{t} u_t^{k+2m}, \qquad (16)$$

$$u^{k+2m}(x,0) = \frac{f(x)}{(k+1)(k+3)\ldots(k+2m-1)}, \quad u_t^{k+2m}(x,0) = 0. \qquad (17)$$

По формуле (15) имеем

$$u^{k+2m}(x,t) = \frac{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+2m-n-|\gamma|+1}{2}\right)}{2^n \Gamma\left(\frac{k+2m}{2}\right)} \times$$

$$\times \int\limits_{B_1^+(n)} [{}^\gamma T^{ty} f(x)](1-|y|^2)^{\frac{k+2m-n-|\gamma|-1}{2}} y^\gamma dy.$$

Используя (6), получим $t^{k+2m-1}u^{k+2m} = u^{2-k-2m}$. Применяя к последней формуле m раз формулу (7), будем иметь $\left(\frac{\partial}{t\partial t}\right)^m (t^{k+2m-1}u^{k+2m}) = u^{2-k}$. Применяя к полученному выражению (6), запишем

$$u^k = t^{1-k}\left(\frac{\partial}{t\partial t}\right)^m (t^{k+2m-1}u^{k+2m}), \qquad (18)$$

что и дает решение (12)–(13) при $k < n+|\gamma|-1$, $k \ne -1,-3,-5,\ldots$. Вспомнив, что для того чтобы рассмотренное u^{k+2m} было решением (16)–(17), достаточно, чтобы f имело непрерывную вторую производную. Для получения решения u^k в рассмотренном случае достаточно, чтобы f имела не менее $\frac{1}{2}(n-k+3)$ непрерывных производных. В этом случае решение рассматриваемой задачи имеет тоже $\frac{1}{2}(n-k+3)$ непрерывных производных.

Получим, наконец, решение задачи Коши (12)–(13) для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу при $k = -1,-3,-5,\ldots$. В этом случае решение задачи Коши u^k существует, когда f имеет $\frac{1}{2}(n-k+3)$ непрерывных производных. Однако частные производные $\frac{\partial^{1-k}u^k}{\partial t^{1-k}}$ этого решения стремятся к бесконечности при $t=0$ со скоростью $\log t$, хотя $f(x)$ – B-полигармоническая порядка $\frac{1-k}{2}$.

B-полигармоническая функция порядка p функция $f(x) = f(x_1,\ldots,x_n)$ действительных переменных, определенная в области пространства P_n^+, имеющая непрерывные частные производные до $2m$-го порядка включительно и удовлетворяющая всюду в рассматриваемой области B-полигармоническому уравнению $\Delta_\gamma^m u = 0$, где Δ_γ – оператор (5). Оператор Δ_γ^m был рассмотрен в [1] и в [14] (см. также ссылки в этих книгах).

Исключительно важная роль B-полигармонических начальных условий может быть показана следующим образом. Пусть сначала $k=-1$. Предположим, что $u_{tt}^{-1}(x,0)$ существует. Пусть $t \to 0$ в уравнении $\Delta_\gamma u^{-1} = u_{tt}^{-1} - \frac{u_t^{-1}}{t}$, т. е.

$$\Delta_\gamma u^{-1}(x,0) = \lim_{t\to 0} \Delta_\gamma u^{-1}(x,t) =$$

$$= \lim_{t\to 0} u_{tt}^{-1}(x,t) - \lim_{t\to 0} \frac{u_t^{-1}(x,t) - u_t^{-1}(x,0)}{t} = 0.$$

То, что $\Delta_\gamma u^{-1}(x,0)=0$, показывает, что $f(x)$ должна быть такой, что $\Delta_\gamma f=0$. Таким образом, $u^{-1}(x,t)=f(x)$. При $k=-3$ имеем $u_{tt}^{-3}(x,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{u_t^{-3}}{t}$. Тогда из общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу при $k=-3$ получим

$$\Delta_\gamma u^{-3}(x,0)=u_{tt}^{-3}(x,0)+\lim_{t\to 0}\left[-3\frac{u_t^{-3}(x,t)}{t}\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{u_t^{-3}}{t}-3\frac{u_t^{-3}(x,t)}{t}\right]=\lim_{t\to 0}\left[-2\frac{u_t^{-3}(x,t)}{t}\right].$$

Из (7) следует, что $t^{-1}u_t^{-3}=u^{-1}$ и

$$\Delta_\gamma u^{-3}(x,0)=\lim_{t\to 0}\left[-2u^{-1}(x,t)\right]. \qquad (19)$$

Если производная $\dfrac{\partial^4 u^{-3}}{\partial t^4}$ существует при $t=0$ и все нечетные производные u^{-3} обращаются в нуль при $t=0$, то $\dfrac{\partial^2 u^{-1}}{\partial t^2}$ тоже существует при $t=0$. Поскольку $\Delta_\gamma u^{-1}(x,0)=0$, то из (19) следует, что $\Delta_\gamma\Delta_\gamma u^{-3}(x,0)=\Delta_\gamma^2 u^{-3}(x,0)=0$. Это наблюдение обобщается на все исключенные случаи. Тогда решение задачи Коши дается формулой

$$u^k(x,t)=f(x)+\sum_{h=1}^{-\frac{k+1}{2}}\frac{\Delta_\gamma^h f}{(k+1)\ldots(k+2h-1)}\frac{t^{2h}}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2h},$$
$$k=-3,-5,-7,\ldots$$

В заключение следует отметить, что анализ многочисленных методов в теории дифференциальных уравнений с операторами Бесселя показывает, что почти все они в явной или неявной формах являются специальными вариантами применения метода операторов преобразования, который проявляет себя в форме использования интегральных уравнений и представлений решений, функций Грина, метода вариации постоянных, формул спуска по параметрам, сплетающих соотношений между решениями возмущенных и невозмущенных уравнений и т. д. При этом важную роль играют специальные классы операторов преобразований: Сонина и Пуассона, а также их обобщения – Бушмана и Эрдейи. По поводу приложений теории операторов преобразования к дифференциальным уравнениям с операторами Бесселя [11; 15–16; 18–20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997. 208 с.
2. *Euler L.* Institutiones calculi integralis. V. III. Petropoli, 1770. Pt. II. Ch. III, IV, V (Opera Omnia. Ser. 1. T. 13. Leipzig; Berlin, 1914. P. 212-230).
3. *Poisson S.D.* Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux diff r′ ences partielles // J. de L'École Polytechechnique. 1823. Ser. 1. P. 215-248.
4. *Риман Б.* О распространении плоских волн конечной амплитуды. Сочинения. Москва; Ленинград: ОГИЗ, 1948. 543 с.
5. *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. V. II. 2 ed. Paris, 1915. 579 p.
6. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 588 с.
7. *Цалдастани О.* Одномерное изоэнтропическое течение жидкости // Проблемы механики: сб. ст. / под ред. Р. Мизеса, Т. Кармана. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955. С. 519-552.
8. *Weinstein A.* Some applications of generalized axially symmetric potential theory to continuum mechanics // Приложения теории функций в механике сплошных сред: тр. Междунар. симп. М.: Наука, 1965. Т. 2. Механика жидкости и газа, математические методы. С. 440-453.
9. *Олевский М.Н.* Решение задачи Дирихле, относящейся к уравнению $\Delta u+\frac{p}{x_n}\frac{\partial u}{x_n}=\rho$ для полусферической области // Доклады АН СССР. 1949. Т. 64. № 6. С. 767-770.
10. *Fox D.N.* The solution and Huygens' principle for a singular Cauchy problem // J. Math. Mech. 1959. V. 8. P. 197-219.
11. *Carroll R.W., Showalter R.E.* Singular and Degenerate Cauchy problems. N. Y.: Academic Press, 1976. 333 p.
12. *Lyakhov L.N., Polovinkin I.P., Shishkina E.L.* Formulas for the Solution of the Cauchy Problem for a Singular Wave Equation with Bessel Time Operator // Doklady Mathematics. 2014. V. 90. № 3. P. 737-742.
13. *Weinstein A.* On the wave equation and the equation of Euler-Poisson // Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. V. 5. Wave motion and vibration theory. New York; Toronto; London: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1954. P. 137-147.
14. *Ляхов Л.Н.* Весовые сферические функции и потенциалы Рисса, порожденные обобщенным сдвигом. Воронеж: ВГТА, 1997. 145 с.
15. *Sitnik S.M.* Transmutations and Applications: a survey // arXiv:1012.3741. 2010. 141 p.
16. *Ситник С.М.* Операторы преобразования и их приложения // Исследования по современному анализу и математическому моделированию: сб. тр. конф. / под ред. Ю.Ф. Коробейника, А.Г. Кусраева. Владикавказ: Владикавказ. науч. центр РАН и РСО-А, 2008. С. 226-293.
17. *Lyakhov L.N., Polovinkin I.P., Shishkina E.L.* On a Kipriyanov problem for a singular ultrahyperbolic equation // Differ. Equ. 2014. V. 50. № 4. P. 513-525.
18. *Kravchenko V.V.* Applied pseudoanalytic function theory (Frontiers in Mathematics). Basel: Birkhäuser, 2009. 182 p.
19. *Катрахов В.В., Ситник С.М.* Краевая задача для стационарного уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом // Доклады АН СССР. 1984. Т. 278. № 4. С. 797-799.
20. *Катрахов В.В., Ситник С.М.* Композиционный метод построения B-эллиптических, B-гиперболических и B-параболических операторов преобразования // Доклады Академии наук. 1994. Т. 337. № 3. С. 307-311.

Поступила в редакцию 24 сентября 2016 г.

Барабаш Ольга Павловна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, магистрант по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика», кафедра математического и прикладного анализа, e-mail: ilina_dico@mail.ru

Шишкина Элина Леонидовна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доцент кафедры математического и прикладного анализа, e-mail: ilina_dico@mail.ru

UDC 517.923
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2146-2151

A SOLUTION OF THE GENERAL EULER–POISSON–DARBOUX EQUATION CONTAINING THE PARAMETER OF THE BESSEL OPERATOR BY VARIABLES

© O.P. Barabash, E.L. Shishkina
Voronezh State University
1 Universitetskaya Sq., Voronezh, Russian Federation, 394018
E-mail: ilina_dico@mail.ru

We give a solution of the general Euler–Poisson–Darboux equation when the parameter of the Bessel operator acting by time variable is real.
Key words: Euler–Poisson–Darboux equation; Bessel operator

REFERENCES

1. Kipriyanov I.A. *Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi* [Singular elliptic boundary condition]. Moscow, Nauka Publ., 1997. 208 p. (In Russian).
2. Euler L. *Institutiones calculi integralis*. V. III. Petropoli, 1770. Pt. II. Ch. III, IV, V (Opera Omnia. Ser. 1. T. 13. Leipzig, Berlin, 1914. P. 212-230).
3. Poisson S.D. Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux diff ences partielles. *J. de L'École Polytechechnique*, 1823, ser. 1, pp. 215-248. (In French).
4. Riman B. *O rasprostranenii ploskikh voln konechnoy amplitudy. Sochineniya* [Plane-wave propagation of finite amplitude. Writings]. Moscow; Leningrad, Association of State Book-Journalistic Publishing, 1948, 543 p. (In Russian).
5. Darboux G. *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*. Vol. II. 2 ed. Paris, 1915. 579 p. (In French).
6. Mizes R. *Matematicheskaya teoriya techeniy szhimaemoy zhidkosti* [Mathematic theory for compressible flow]. Moscow, Foreign Literature Publ., 1961. 588 p. (In Russian).
7. Tsaldastani O. Odnomernoe izoentropicheskoe techenie zhidkosti [One-dimension isentropic stream of liquid]. *Problemy mekhaniki* [Mechanics problems]. Moscow, Foreign literature Publ., 1955, pp. 519-552. (In Russian).
8. Weinstein A. Some applications of generalized axially symmetric potential theory to continuum mechanics. *Trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma «Prilozheniya teorii funktsiy v mekhanike sploshnykh sred».* Vol. 2. Mekhanika zhidkosti i gaza, matematicheskie metody [The works of International symposium "Supplement of theory of function to mechanics of continue". Vol. 2. Mechanics of liquids and gas, mathematic methods]. Moscow, Nauka Publ., 1965, pp. 440-453.
9. Olevskiy M.N. Reshenie zadachi Dirikhle, otnosyashcheysya k uravneniyu $\Delta u+\frac{p}{x_n}\frac{\partial u}{x_n}=\rho$ dlya polusfericheskoy oblasti [Dirichlet's problem solution, relating to equation $\Delta u+\frac{p}{x_n}\frac{\partial u}{x_n}=\rho$ for semispherical domain]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1949, vol. 64, no. 6, pp. 767-770. (In Russian).
10. Fox D.N. The solution and Huygens' principle for a singular Cauchy problem. *J. Math. Mech.*, 1959, vol. 8, pp. 197-219.
11. Carroll R.W., Showalter R.E. *Singular and Degenerate Cauchy problems*. New York, Academic Press, 1976. 333 p.
12. Lyakhov L.N., Polovinkin I.P., Shishkina E.L. Formulas for the Solution of the Cauchy Problem for a Singular Wave Equation with Bessel Time Operator. *Doklady Mathematics*, 2014, vol. 90, no. 3, pp. 737-742.
13. Weinstein A. On the wave equation and the equation of Euler-Poisson. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. V. 5. Wave motion and vibration theory*. New York; Toronto; London, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1954, pp. 137-147.
14. Lyakhov L.N. *Vesovye sfericheskie funktsii i potentsialy Rissa, porozhdennye obobshchennym sdvigom* [Weighted spherical harmonic and Riesz potential by generalized shear]. Voronezh, Voronezh State Technological Publ., 1997. 145 p. (In Russian).
15. Sitnik S.M. Transmutations and Applications: a survey. *arXiv:1012.3741*, 2010. 141 p.
16. Sitnik S.M. Operatory preobrazovaniya i ikh prilozheniya [Transformation operators and their applications]. Sbornik trudov konferentsii «*Issledovaniya po sovremennomu analizu i matematicheskomu modelirovaniyu*» [A collection of conference works "Researches on modern analysis and methematic modeling"]. Vladikavkaz, Vladikavkaz Scientific Centre RAS and the Republic of North Ossetia-Alania, 2008, pp. 226-293. (In Russian).
17. Lyakhov L.N., Polovinkin I.P., Shishkina E.L. On a Kipriyanov problem for a singular ultrahyperbolic equation. *Differ. Equ.*, 2014, vol. 50, no. 4, pp. 513-525.
18. Kravchenko V.V. *Applied pseudoanalytic function theory (Frontiers in Mathematics)*. Basel, Birkhäuser Publ, 2009. 182 p.
19. Katrakhov V.V., Sitnik S.M. Kraevaya zadacha dlya statsionarnogo uravneniya Shredingera s singulyarnym potentsialom [Boundary value problem for Schrödinger's steady equation with singular potential]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1984, vol. 278, no. 4, pp. 797-799. (In Russian).

20. Katrakhov V.V., Sitnik S.M. Kompozitsionnyy metod postroeniya V-ellipticheskikh, V-giperbolicheskikh i V-parabolicheskikh operatorov preobrazovaniya [Compositional design method of V-ellipsoid, V-hyperbolic and V-parabolic transformation operator]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 1994, vol. 337, no. 3, pp. 307-311. (In Russian).

Received 24 September 2016

Barabash Olga Pavlovna, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, Master's Degree Student of Applied Mathematics and Informatics, Mathematic and Applied Analysis Department, e-mail: ilina_dico@mail.ru

Shishkina Elina Leonidovna, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, Associate Professor Mathematic and Applied Analysis Department, e-mail: ilina_dico@mail.ru

Информация для цитирования:

Барабаш О.П., Шишкина Э.Л. Решение общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, содержащее оператор Бесселя по всем переменным // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2146-2151. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2146-2151

Barabash O.P., Shishkina E.L. Reshenie obshchego uravneniya Eylera–Puassona–Darbu, soderzhashchee operator Besselya po vsem peremennym [A solution of the general Euler–Poisson–Darboux equation containing the parameter of the Bessel operator by variables]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 2146-2151. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2146-2151 (In Russian).