УДК 517.95
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2098-2106

ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ОПЕРЕЖЕНИЕМ

© **Е. В. Чаплыгина, А. Н. Зарубин**

Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева
302026, Российская Федерация, г. Орел, ул. Комсомольская, 95
E-mail: aleks_zarubin@mail.ru

Исследуется задача Геллерстедта для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе в главной части и переменным отклонением аргумента. Доказана теорема единственности без ограничения на величину отклонения. Найдены в явной форме интегральные представления решений в области эллиптичности и гиперболичности.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа; задача Коши; задача Дирихле; разностное уравнение; задача Геллерстедта

1. Постановка задачи.

В смешанной области $D = D^+ \cup D^- \cup I$, где

$$D^+ = \bigcup_{k=0}^{2} D_k^+ \cup J = \{(x,y) : 0 < x < \sqrt{3}\tau, 0 < y < h\} \ (0 < h, \tau \equiv const)$$

и $D^- = \bigcup\limits_{k=0}^{2} D_k^-$ — эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$D_k^+ = \{(x,y) : \sqrt{k}\tau < x < \sqrt{k+1}\tau, 0 < y < h\} \ (k = 0,1,2),$$

$$D_k^- = \{(x,y) : -y + \sqrt{k}\tau < \alpha_1^k(x) < y + \sqrt{k+1}\tau, (\sqrt{k} - \sqrt{k+1})\tau/2 < y < 0\}$$
$$(k = 0,1,2),$$

$$I = \{(x,y) : 0 < x < \sqrt{3}\tau, y = 0\} = \bigcup_{k=0}^{2} I_k,$$

$$I_k = \{(x,y) : \sqrt{k}\tau < x < \sqrt{k+1}\tau, y = 0\} \ (k = 0,1,2),$$

$$J = \bigcup_{k=1}^{2} J_k, \ J_k = \{(x,y) : x = \sqrt{k}\tau, 0 < y < h\} \ (k = 1,2),$$

$$\alpha_1^0(x) = x, \alpha_1^1(x) = \sqrt{x^2 - \tau^2}, \alpha_1^2(x) = \alpha_1(\alpha_1(x)) = \sqrt{x^2 - 2\tau^2},$$

рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} Lu(x,y) \equiv u_{xx}(x,y) + sgn(y)u_{yy}(x,y) = \\ = H(x-\tau)u(\sqrt{x^2-\tau^2}, y) + H(\sqrt{2}\tau - x)u(\sqrt{x^2+\tau^2}, y), \end{aligned} \tag{1}$$

где $H(\xi)$ — функция Хевисайда.

Пусть $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k (k=0,1,2)$. Тип функционального запаздывания и опережения следует из представлений

$$u(\sqrt{x^2-\tau^2}, y) = u(x-(x-\sqrt{x^2-\tau^2}), y) = u(x-\tau_1(x), y) = R_x^{\tau_1(x)} u(x,y),$$

$$u(\sqrt{x^2+\tau^2}, y) = u(x+(\sqrt{x^2+\tau^2}-x), y) = u(x+\tau_2(x), y) = R_x^{-\tau_2(x)} u(x,y),$$

где $R_x^{\theta(t)}$ — оператор сдвига по переменной x: $R_x^{\theta} q(x,y) = q(x-\theta(t), y)$:

$$\tau_1(x) = x - \sqrt{x^2-\tau^2} > 0, \tau_2(x) = \sqrt{x^2+\tau^2} - x > 0.$$

Задача G**.** Найти в области D функцию $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \backslash J) \cap C^2(D \backslash (I \cup J))$, удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям

$$u(0,y) = u(\sqrt{3}\tau, y) = 0, \ 0 \le y \le h, \tag{2}$$

$$u(x,h) = \varphi(x), \ 0 \le x \le \sqrt{3}\tau, \tag{3}$$

$$u(x, -\alpha_1^k(x)) = \psi_k(x), \ \sqrt{k}\tau < x < (\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\tau/2 \ (k=0,2), \tag{4}$$

$$u(x, \alpha_1(x)-\tau) = \psi_1(x), (1+\sqrt{2})\tau/2 < x < \sqrt{2}\tau, \tag{5}$$

условиям сопряжения

$$u(x,0-) = u(x,0+) = \omega(x), 0 \le x \le \sqrt{3}\tau; \tag{6}$$

$$u_y(x,0-) = u_y(x,0+) = \nu(x), 0 < x < \sqrt{3}\tau, x \ne \tau, \sqrt{2}\tau; \tag{7}$$

условиям согласования

$$\varphi(0) = \varphi(\sqrt{3}\tau) = \psi_0(0) = 0, \psi_1(\sqrt{2}\tau) = \psi_2(\sqrt{2}\tau),$$

где $\varphi(x), \psi_k(x)$ $(k=0,1,2)$ — заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

2. Общее решение уравнения (1)

Уравнение (1) в терминах функций

$$u_k^{\pm}(x,y) = u(x,y), (x,y) \in D_k^{\pm} \ (k=0,1,2) \tag{8}$$

можно записать в форме системы

$$L\bar{u}^{\pm}(x,y) = A\bar{u}^{\pm}(x,y), \ (x,y) \in D_0^+,$$

где

$$\bar{u}^{\pm}(x,y) = (u_0^{\pm}(x,y), u_1^{\pm}(\alpha_2^1(x), y), u_2^{\pm}(\alpha_2^2(x), y))^{\mathrm{T}}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

которая в характеристических переменных

$$\xi = x + y\sqrt{-sgny}, \eta = x - y\sqrt{-sgny} \tag{10}$$

будет иметь вид матричного уравнения

$$4\bar{u}_{\xi\eta}^{\pm}(\xi,\eta) = A\bar{u}^{\pm}(\xi,\eta).$$

Решение этого уравнения, найденное методом последовательных приближений или с помощью [1, с. 67–68], можно представить формулой

$$\bar{u}^{\pm}(\xi,\eta)=\bar{u}^{\pm}(0,0)\mathcal{J}_0(i\sqrt{A\xi\eta})+\int\limits_0^{\xi}\mathcal{J}_0(i\sqrt{A\eta(\xi-t)})\bar{\Phi}_1^{\pm}(t)dt+$$
$$+\int\limits_0^{\eta}\mathcal{J}_0(i\sqrt{A\xi(\eta-t)})\bar{\Phi}_2^{\pm}(t)dt, \tag{11}$$

где $\bar{\Phi}_1^{\pm}(t),\bar{\Phi}_2^{\pm}(t)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые вектор–функции; $i=\sqrt{-1},\mathcal{J}_0(z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(z/2)^{2k}/(k!\Gamma(k+1))$ — функция Бесселя [2, с.727] первого рода нулевого порядка.

Поскольку матрица A из (9) имеет различные собственные значения $\lambda_1=0,\lambda_{2,3}=\pm\sqrt{2}$, то она приводима к диагональному виду, то есть существует матрица $T_A(|T_A|\neq 0)$ такая, что $T_A^{-1}AT_A=\Lambda_A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$, причем

$$T_A=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ 0 & 2 & 2\\ -1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{pmatrix},\ T_A^{-1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{2} & 1\\ -1 & \sqrt{2} & -1\end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\mathcal{J}_0(i\sqrt{A}t)=\mathcal{J}_0(i\sqrt{T_A\Lambda_AT_A^{-1}t})=T_A\mathcal{J}_0(i\sqrt{\Lambda_At})T_A^{-1}=$$
$$=T_A\begin{pmatrix}\mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_1t}) & 0 & 0\\ 0 & \mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_2t}) & 0\\ 0 & 0 & \mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_3t})\end{pmatrix}T_A^{-1}=$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}+\sqrt{2}\gamma_2(t) & 2\gamma_1(t) & -2\sqrt{2}+\sqrt{2}\gamma_2(t)\\ 2\gamma_1(t) & 2\sqrt{2}\gamma_2(t) & 2\gamma_1(t)\\ -2\sqrt{2}+\sqrt{2}\gamma_2(t) & 2\gamma_1(t) & 2\sqrt{2}+\sqrt{2}\gamma_2(t)\end{pmatrix}, \tag{12}$$

где

$$\gamma_n(t)=\mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_2t})+(-1)^n\mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_3t})\ (n=1,2). \tag{13}$$

Поэтому из равенства (11) в силу (12), (13) и возвращения к старым переменным по формулам (10) найдем общее решение уравнения (1) в форме

$$\bar{u}_k^{\pm}(\alpha_2^k(x),y)=\lambda_2^{(1-(-1)^k)/2}\int\limits_0^{z_0^{\pm}}\Phi_1^{\pm}(t)\mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_2\bar{z}_0^{\pm}(z_0^{\pm}-t)})dt+$$
$$+\lambda_2^{(1-(-1)^k)/2}\int\limits_0^{\bar{z}_0^{\pm}}\Phi_2^{\pm}(t)\mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_2z_0^{\pm}(\bar{z}_0^{\pm}-t)})dt,\ (x,y)\in D_0^{\pm}\ (k=0,1,2), \tag{14}$$

где $\Phi_1^{\pm}(t),\Phi_2^{\pm}(t)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции;

$$z_0^+=x+iy,\bar{z}_0^+=x-iy;z^-=x+y,\bar{z}_0^-=x-y,$$

причем

$$\alpha_2^0(x) = x, \alpha_2^1(x) = \alpha_2(x) = \sqrt{x^2+\tau^2}, \alpha_2^2(x) = \alpha_2(\alpha_2(x)) = \sqrt{x^2+2\tau^2}$$

и

$$\begin{gathered} u_k^{\pm}(\sqrt{k+1}\tau-0,y)=u_{k+1}^{\pm}(\sqrt{k+1}\tau+0,y)=0,\ 0\le y\le h; \\ \frac{\partial}{\partial x}(u_k^{\pm}(\sqrt{k+1}\tau-0,y))\neq\frac{\partial}{\partial x}(u_{k+1}^{\pm}(\sqrt{k+1}\tau+0,y)), 0<y<h(k=0,1). \end{gathered} \tag{15}$$

3. Однозначная разрешимость задачи G

Т е о р е м а 1. *Если* $\varphi(x)\in C[\sqrt{k}\tau,\sqrt{k+1}\tau]\cap C^2(\sqrt{k}\tau,\sqrt{k+1}\tau)$ $(k=0,1,2)$, $\psi_k\in$ $\in C[\sqrt{k}\tau,(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\tau/2]\cap C^2(\sqrt{k}\tau,(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\tau/2)(k=0,2)$, $\psi_1\in C[(1+\sqrt{2})\tau/2,\sqrt{2}\tau]\cap$ $\cap\, C^2((1+\sqrt{2})\tau/2,\sqrt{2}\tau)$ *абсолютно интегрируемы на своих промежутках;* $\varphi(0)=\varphi(\sqrt{3}\tau)=$ $=\psi_0(0)=0$, $\psi_1(\sqrt{2}\tau)=\psi_2(\sqrt{2}\tau)$ *и* $\psi_k'(x)$ *при* $x\to\sqrt{k}\tau(k=0,2)$, $\psi_1'(x)$ *при* $x\to\sqrt{2}\tau$ *допускают интегрируемую особенность, то существует единственное решение* $u(x,y)$ *задачи* G.

Единственность решения задачи G следует из утверждений.

Л е м м а 1. Если $u(x,y)$ — решение уранения (1) в области $D^-=\bigcup_{k=0}^2 D_k^-$ из класса $C(\bar{D}^-)\cap C^2(D^-)$, обращающееся в нуль на характеристиках

$$y=-\alpha_1^k(x), \sqrt{k}\tau<x<(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\tau/2(k=0,2), y=\alpha_1(x)-\tau,$$

$$(1+\sqrt{2})\tau/2<x<\sqrt{2}\tau,$$

то

$$\beta=\int\limits_0^{\sqrt{3}\tau}\omega(x)\nu(x)dx\ge 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы аналогично приведенному в [4, с. 128–130] (по схеме [5, с. 491–493]).

Л е м м а 2. Если $u(x,y)$ — решение уравнения (1) в области D^+ из класса $C(\bar{D}^+)\cap$ $\cap\, C^2(D^+\backslash J)$, обращающееся в нуль при $x=\sqrt{k}\tau(0\le y\le h)(k=0,1,2,3;$ в силу (2) и (15)) $y=h(0\le x\le\sqrt{3}\tau)$, то $\beta\le 0$ и

$$\beta+\iint\limits_{D^+}[u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y)+\gamma^2(x,y)]dxdy=0, \tag{16}$$

где

$$\gamma^2(x,y)=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-\tau^2}}\right)H(x-\tau)u(x,y)u(\sqrt{x^2-\tau^2},y)\ge 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о получим из тождества

$$u(x,y)[Lu(x,y)-H(x-\tau)u(\sqrt{x^2-\tau^2},y)-H(\sqrt{2}\tau-x)u(\sqrt{x^2+\tau^2},y)]=$$

$$=(u(x,y)u_x(x,y))_x+(u(x,y)u_y(x,y))_y-u_x^2(x,y)-u_y^2(x,y)-$$

$$-H(x-\tau)u(x,y)u(\sqrt{x^2-\tau^2},y)-H(\sqrt{2}\tau-x)u(x,y)u(\sqrt{x^2+\tau^2},y)=0,$$

интегрируя которое по области

$$D_\varepsilon^+=\{(x,y):0<x<\sqrt{3}t,\varepsilon<y<h\}(0<\varepsilon\equiv const),$$

применяя формулу Грина [6, с.541] и условия леммы, в пределе при $\varepsilon \to 0$, в силу равенства

$$\iint\limits_{D_\varepsilon^+} H(\sqrt{2}\tau - x)u(x,y)u(\sqrt{x^2+\tau^2},y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_\varepsilon^+} H(x-\tau)u(\sqrt{x^2-\tau^2},y)u(x,y)\frac{x}{\sqrt{x^2-\tau^2}}dxdy,$$

будем иметь (16) и

$$\gamma^2(x,y) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-\tau^2}}\right)H(x-\tau)\Big[u^2(x,y)+u^2(\sqrt{x^2-\tau^2},y)-$$

$$-\big(u(x,y)-u(\sqrt{x^2-\tau^2},y)\big)^2\Big] \geqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-\tau^2}}\right)H(x-\tau)\Big[u^2(x,y)+$$

$$+\Big(\int\limits_{\sqrt{x^2-\tau^2}}^{\sqrt{3}\tau}|u_\xi(\xi,y)|d\xi\Big)^2 - \Big(\int\limits_{\sqrt{x^2-\tau^2}}^{x}|u_\xi(\xi,y)|d\xi\Big)^2\Big] \geqslant 0.$$

Вопрос **существования решения** задачи G в области $D = D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup J$ связан с построением в $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k (k=0,1,2)$, на основании общих решений (14) функций $u_k^\pm(x,y)$, $(x,y)\in D_k^\pm$ $(k=0,1,2)$, удовлетворяющих условиям (2)–(7), (8), (15) в которых $\varphi(x), \psi_k(x)(k=0,1,2)$ заданы, а $\omega(x), \nu(x)$ подлежат определению. Для этого достаточно решить задачу G для уравнения (1), например, в области $D_2 = D_2^+ \cup D_2^- \cup I_2$, то есть найти $u_2^\pm(\alpha_2^2(x),y), (x,y)\in D_0$ при условиях, согласно (2)–(7), (15):

$$u_2^+(\alpha_2^2(x),h) = \varphi(\alpha_2^2(x)), 0 \le x \le \tau, \tag{17}$$

$$u_2^+(\alpha_2^2(0),y) = u_2^+(\alpha_2^2(\tau),y) = 0, 0 \le y \le h, \tag{18}$$

$$u_2^-(\alpha_2^2(x),-x) = \psi_2(\alpha_2^2(x)) = 0, 0 < x < \tau/2, \tag{19}$$

$$u_2^-(\alpha_2^2(x),0-) = u_2^+(\alpha_2^2(x),0+) = \omega(\alpha_2^2(x)), 0 \le x \le \tau, \tag{20}$$

$$u_{2y}^-(\alpha_2^2(x),0-) = u_{2y}^+(\alpha_2^2(x),0+) = \nu(\alpha_2^2(x)), 0 < x < \tau, \tag{21}$$

$$\varphi(\alpha_2^2(0)) = \varphi(\alpha_2^2(\tau)), \omega(\alpha_2^2(0)) = \omega(\alpha_2^2(\tau)) = \psi_2(\alpha_2^2(0)) = 0.$$

Задача Коши. Найти в области D_2^- решение $u_2^-(x,y)$ уравнения (1)из класса $C(\bar{D}_2^-)\cap \cap C^2(D_2^-)$, удовлетворяющее условиям (20), (21), то есть

$$u_2^-(\alpha_2^2(x),0-) = \omega(\alpha_2^2(x)), 0 \le x \le \tau,$$

$$u_{2y}^-(\alpha_2^2(x),0-) = \nu(\alpha_2^2(x)), 0 < x < \tau,$$

где $\omega(\alpha_2^2(x)), \nu(\alpha_2^2(x))$ — непрерывные достаточно гладкие функции, причем $\omega(\alpha_2^2(0)) = = \omega(\alpha_2^2(\tau)) = 0$.

Т е о р е м а 2. *Если* $\omega(\alpha_2^2(x))\in C[0,\tau]\cap C^2(0,\tau)$, $\nu(\alpha_2^2(x))\in C^1(0,\tau)$, $\omega(\alpha_2^2(0))=\omega(\alpha_2^2(\tau))=0$, *то существует единственное решение задачи Коши* $u_2^-(x,y)\in C(\bar{D}_2^-)\cap C^2(D_2^-)$ *вида*

$$\begin{gathered} u_2^-(\alpha_2^2(x),y) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{x+y}\mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_2(x-y)(x+y-t)})[p'(t)+r(t)]dt+ \\ +\frac{1}{2}\int\limits_0^{x-y}\mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_2(x+y)(x-y-t)})[p'(t)-r(t)]dt, (x,y)\in D_0^-, \end{gathered} \tag{22}$$

где

$$p(x)=\omega(\alpha_2^2(x))+\int\limits_0^x \omega(\alpha_2^2(\xi))\frac{x}{\xi}\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{I}_0(i\sqrt{\lambda_2\xi(x-\xi)})d\xi, \tag{23}$$

$$r(x)=\nu(\alpha_2^2(x))+\int\limits_0^x \nu(\alpha_2^2(\xi))\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{I}_0(i\sqrt{\lambda_2\xi(x-\xi)})d\xi. \tag{24}$$

Доказательство следует из (14), аналогично [7].

Функциональное соотношение между $\omega(\alpha_2^2(x))$ и $\nu(\alpha_2^2(x))$, принесенное на линию изменения типа уравнения (1) $y=0, 0<x<\tau$, получим из (22), полагая $y=-x$ и учитывая условие (19) задачи G:

$$\psi_2(\alpha_2^2(x))=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2x}[p'(t)-r(t)]dt, 0<x<\tau/2,$$

или, после замены x на $x/2$ и дифференцирования,

$$p'(t)=r(x)+2(\psi_2(\alpha_2^2(x/2)))', 0<x<\tau. \tag{25}$$

Выражение (25) является искомым функциональным соотношением.

Задача Дирихле. В области D_2^+ найти решение $u_2^+(x,y)\in C(\bar{D}_2^+)\cap C^2(D_2^+)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (17), (18), (20), то есть

$$u_2^+(\alpha_2^2(x),h)=\varphi(\alpha_2^2(x)), 0\le x\le\tau,$$

$$u_2^+(\alpha_2^2(0),y)=u_2^+(\alpha_2^2(\tau),y)=0, 0\le y\le h,$$

$$u_2^+(\alpha_2^2(x),0+)=\omega(\alpha_2^2(x)), 0\le x\le\tau,$$

где $\varphi(\alpha_2^2(x)),\omega(\alpha_2^2(x))$ — непрерывные достаточно гладкие функции, причем $\omega(\alpha_2^2(0))=$ $=\omega(\alpha_2^2(\tau))=\varphi(\alpha_2^2(0))=\varphi(\alpha_2^2(\tau))=0$.

Теорема 3. *Если* $\varphi(\alpha_2^2(x))$, $\omega(\alpha_2^2(x))\in C[0,\tau]\cap C^2(0,\tau)$ *и* $\omega(\alpha_2^2(0))=\omega(\alpha_2^2(\tau))=$ $=\varphi(\alpha_2^2(0))=\varphi(\alpha_2^2(\tau))=0$, *то существует единственное решение* $u_2^+(x,y)\in C(\overline{D_2^+})\cap C^2(D_2^+)$ *задачи Дирихле вида*

$$\begin{gathered}u_2^+(\alpha_2^2(x),y)=\int\limits_0^{x+iy}\mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_2(x-iy)(x+iy-t)})\Big[p'(t)-\\ -\sum_{k=0}^{+\infty}R_t^{2ikh}(p'(t)-R_t^{ih}\beta'(t))\Big]dt+\int\limits_0^{x-iy}\mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_2(x+iy)(x-iy-t)})\times\\ \times\Big[\sum_{k=0}^{+\infty}R_t^{2ikh}(p'(t)-R_t^{ih}\beta'(t))\Big]dt, (x,y)\in D_0^+,\end{gathered} \tag{26}$$

где

$$\beta(x)=\varphi(\alpha_2^2(x))+\frac{i\sqrt{x^2+h^2}}{2}\int\limits_0^1\frac{\varphi(\alpha_2^2(xt)}{\sqrt{t(1-t)}}\mathcal{I}_1(i\sqrt{\lambda_2(x^2+h^2)(1-t)})dt, \tag{27}$$

а $p(x)$ *определяется равенством (23).*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из (14), аналогично [7].

Найдем **функциональное соотношение** между $\omega(\alpha_2^2(x))$ и $\nu(\alpha_2^2(x))$, принесенное на линию $y=0, 0<x<\tau$.

Подставляя в равенство (14) условие (21), получаем уравнение

$$\nu(\alpha_2^2(x)) = M_{0y}^{+}(x,0) - \int\limits_0^x M_{0y}^{+}(t,0)\frac{t}{x}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_2 x(x-t)})dt, 0<x<\tau,$$

обращая которое относительно $M_{0y}^{+}(x,0)$ аналогично [1, с.49], придем к равенству

$$r(x) = ip'(x) - 2i\sum_{k=0}^{+\infty} R_x^{2ikh}p'(x) + 2i\sum_{k=0}^{+\infty} R_x^{ih(2k+1)}\beta'(x),$$

представимому в виде

$$(1-R_x^{2ih})r(t) = -i(1+R_x^{2ih})p'(x) + 2iR_x^{ih}\beta'(x), 0<x<\tau. \tag{28}$$

Выражение (28) является искомым функциональным соотношением.

Вопрос **существования решения** задачи G в области $D_2 = D_2^+ \cup D_2^- \cup I_2$ сводится к разрешимости системы функциональных соотношений (25), (28), то есть к разностному уравнению

$$\begin{gathered}(1+iR_x^{2ih})r(x) = \rho(x) \equiv -(i+1)(1+R_x^{2ih})(\psi_2(\alpha_2^2(x/2)))' + \\ +(i+1)R_x^{ih}\beta'(x),\ 0<x<\tau.\end{gathered} \tag{29}$$

Решение разностного уравнения (29) можно записать [8] в виде

$$\begin{gathered}r(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-i)^n R_x^{2ihn}\rho(x) = -(\psi_2(\alpha_2^2(x/2)))' + \\ + \int\limits_0^\tau (\psi_2(\alpha_2^2(\xi/2)))' G_1(x,\xi)d\xi + \int\limits_0^\tau \beta'(\xi)G_2(x,\xi)d\xi,\ 0<x<\tau,\end{gathered} \tag{30}$$

где $G_i(x,\xi)(i=1,2)$ определяются аналогично [9].

Таким образом, учитывая (30) в (24), применяя формулы взаимного обращения получим

$$\nu(\alpha_2^2(x)) = r(x) - \int\limits_0^x r(t)\frac{t}{x}\frac{\partial}{\partial t}J_0(i\sqrt{\lambda_2 x(x-t)})dt,\ 0<x<\tau. \tag{31}$$

На основании свойств функций $\varphi(\alpha_2^2(x))$, $\psi_2(\alpha_2^2(x))$, входящих в (29), (30), из (31) следует, что $\nu(\alpha_2^2(x)) \in C^1(0,\tau)$.

Очевидно, интегрируя (25), подставляя $p(x)$, $r(x)$ из (23), (30), найдем $\omega(\alpha_2^2(x)) \in C[0,\tau] \cap$ $\cap\ C^2(0,\tau)$.

Подстановка функций $\omega(\alpha_2^2(x))$ и $\nu(\alpha_2^2(x))$ в формулы (22), (26) приводит к окончательному виду решения задачи Коши и задачи Дирихле в областях D_2^- и D_2^+, то есть в области $D_2 = D_2^+ \cup D_2^- \cup I_2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. Москва; Ленинград; 1948.

2. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М., 1983.
3. *Векуа И.Н.* Обращение одного интегрального преобразования и его некоторые приложения // Сообщения АН ГрузССР. 1945. Т. 6. № 3. С. 177–183.
4. *Зарубин А.Н.* Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. Орел, 1997.
5. *Франкль Ф.И.* Избранные труды по газовой динамике. М., 1973.
6. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. М., 1988.
7. *Зарубин А.Н.* Задача Трикоми для опережающе–запаздывающего уравнения смешанного типа с замкнутой линией вырождения // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1315–1327.
8. *Зарубин А.Н.* Краевая задача для уравнения смешанного типа с опережающе-запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 10. С. 1404–1411.
9. *Зарубин А.Н.* Краевая задача для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1362–1372.

Поступила в редакцию 20 октября 2016 г.

Чаплыгина Елена Викторовна, Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева, г. Орел, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, e-mail: lena260581@yandex.ru

Зарубин Александр Николаевич, Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева, г. Орел, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений, e-mail: aleks_zarubin@mail.ru

UDC 517.95
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2098-2106

THE GELLERSTEDT PROBLEM FOR EQUATION OF THE MIXED TYPE WITH FUNCTIONAL DELAY AND ADVANCE

© **E. V. Chaplygina, A. N. Zarubin**

Orel State University named after I. S. Turgenev
95 Komsomolskaya St., Orel, Russian Federation, 302026
E-mail: aleks_zarubin@mail.ru

Investigates the task of Gellerstedt for the mixed type equation with the operator Lavrentiev-Bitsadze in the main part and a variable deviation of the argument. The General solution of the equation. Proved the uniqueness theorem without restrictions on the magnitude of the deviation. Found in the explicit integral representations of solutions in the field of ellipticity and hyperbolicity.

Key words: equation of mixed type; the Cauchy problem; the Dirichlet problem; difference equation; the Gellerstedt problem

REFERENCES

1. *Vekua I.N.* Novye metody resheniya ellipticheskih uravnenij. Moskva; Leningrad; 1948.
2. *Prudnikov A.P., Brychkov YU.A., Marichev O.I.* Integraly i ryady. Spetsial'nye funktsii. M., 1983.
3. *Vekua I.N.* Obrashchenie odnogo integral'nogo preobrazovaniya i ego nekotorye prilozheniya // Soobshcheniya AN GruzSSR. 1945. T. 6. № 3. S. 177–183.
4. *Zarubin A.N.* Uravneniya smeshannogo tipa s zapazdyvayushchim argumentom. Orel, 1997.
5. *Frankl' F.I.* Izbrannye trudy po gazovoj dinamike. M., 1973.

6. *Ter-Krikorov A.M., SHabunin M.I.* Kurs matematicheskogo analiza. M., 1988.
7. *Zarubin A.N.* Zadacha Trikomi dlya operezhayushche–zapazdyvayushchego uravneniya smeshannogo tipa s zamknutoj liniej vyrozhdeniya // Differentsial'nye uravneniya. 2015. T. 51. № 10. S. 1315–1327.
8. *Zarubin A.N.* Kraevaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa s operezhayushche-zapazdyvayushchim argumentom // Differentsial'nye uravneniya. 2012. T. 48. № 10. S. 1404–1411.
9. *Zarubin A.N.* Kraevaya zadacha dlya operezhayushche-zapazdyvayushchego uravneniya smeshannogo tipa s negladkoj liniej vyrozhdeniya // Differentsial'nye uravneniya. 2014. T. 50. № 10. S. 1362–1372.

Received 20 October 2016

Chaplygina Elena Viktorovna, Orel State University named after I. S. Turgenev, Orel, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical Analysis and Differential Equations Department, e-mail: lena260581@yandex.ru

Zarubin Aleksander Nikolaevich, Orel State University named after I. S. Turgenev, Orel, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Chair of Mathematical Analysis and Differential Equations, e-mail: aleks_zarubin@mail.ru

Информация для цитирования:

Чаплыгина Е.В., Зарубин А.Н. Задача Геллерстедта для уравнения смешанного типа с функциональным запаздыванием и опережением // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2098-2106. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2098-2106

Chaplygina E.V., Zarubin A.N. Zadacha Gellerstedta dlya uravneniya smeshannogo tipa s funktsional'nym zapazdyvaniem i operezheniem [The Gellerstedt problem for equation of the mixed type with functional delay and advance]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 2098-2106. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2098-2106 (In Russian)