УДК 517.98

# ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПУАССОНА И ФУРЬЕ ДЛЯ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© **В.Ф. Молчанов, Е.В. Евсеева**

*Ключевые слова*: группы и алгебры Ли; представления групп Ли; тензорные произведения; сплетающие операторы.

Вычислены явно сплетающие операторы, дающие разложение на неприводимые составляющие тензорного произведения неприводимых конечномерных представлений группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ . Эти операторы оказываются дифференциальными операторами. Мы применяем другой способ по сравнению с предыдущими работами.

Известно, что это тензорное произведение $T_l \otimes T_m$ неприводимых конечномерных представлений представлений группы $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ со старшими весами $l$ и $m$ . раскладывается следующим образом (для определенности будем считать $l \geqslant m$ ):

$$T_l \otimes T_m = T_{l-m} + T_{l-m+1} + \ldots + T_{l+m-1} + T_{l+m}.$$

Мы пишем в явном виде сплетающие операторы, дающие разложение на неприводимые составляющие этого тензорного произведения, мы называем их преобразованиями Пуассона и Фурье. Оказывается, что эти операторы являются дифференциальными операторами. Мы используем другой способ по сравнению с [1], мы используем собственные векторы произведения повышающего и понижающего операторов. Для преобразования Пуассона и $m = 1$ этот способ был применен в [2]. Преобразование Фурье совпадает с точностью до множителя со скобками Ранкина–Коэна.

## § 1. Преобразования Пуассона и Фурье

Группа $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ состоит из вещественных матриц второго порядка с определителем единица:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Всякое конечномерное неприводимое представление $T_k$ группы $G$ задается числом $k$ (*старшим весом*), таким, что $2k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ . Оно действует в пространстве $V_k$ многочленов $\varphi(x)$ от $x$ степени $\leqslant 2k$ (так что $\dim V_k = 2k+1$ ) по формуле

$$\left(T_k(g)\,\varphi\right)(x) = \varphi\left(x \cdot g\right)\,(\beta x + \delta)^{2k}, \quad x \cdot g = \frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\,,$$

мы считаем, что $G$ действует справа. Тензорное произведение $V_{lm} = V_l \otimes V_m$ состоит из многочленов $f(x, y)$ степени $\leqslant 2l$ по $x$ и степени $\leqslant 2m$ по $y$ . Представление $T_{lm} = T_l \otimes T_m$ группы $G$ действует в $V_{lm}$ по формуле

$$\left(T_{lm}(g) f\right)(x, y) = f(x \cdot g\,,\, y \cdot g\,)\,(\beta x + \delta)^{2l}\,(\beta y + \delta)^{2m}\,.$$

Известно, что это тензорное произведение раскладывается в прямую однократную сумму:

$$T_{lm} = \sum_k T_k\,, \tag{1.1}$$

где $k$ пробегает множество

$$l-m,\, l-m+1,\, \ldots,\, l+m-1,\, l+m\,. \tag{1.2}$$

Чтобы упростить запись, мы не указываем зависимость от $l, m$ – как в правой части (1.1), так и в дальнейшем. Соответственно разложению (1.1) пространство $V_{lm}$ разлагается в сумму подпространств:

$$V_{lm} = \sum_k W_k\,,$$

инвариантных и неприводимых относительно $T_{lm}$. Ограничение представления $T_{lm}$ на $W_k$ эквивалентно $T_k$. Обозначим для краткости

$$r = m - l. \tag{1.3}$$

Мы будем использовать следующие обозначения для «обобщенных степеней»:

$$a^{[s]} = a\,(a+1)\ldots(a+s-1), \quad a^{(s)} = a\,(a-1)\ldots(a-s+1),$$

$a^{[0]} = a^{(0)} = 1$, где $a$ – число или оператор, $s \in \mathbb{N}$.

Пусть $k$ принадлежит множеству (1.2). Обозначим

$$j = l + m - k, \tag{1.4}$$

так что $2l-j = k-r$, $2m-j = k+r$. Рассмотрим операторы $M_k : V_k \to V_{lm}$ и $F_k : V_{lm} \to$ $\to V_k$, сплетающие представления $T_{lm}$ и $T_k$, то есть

$$M_k\, T_k(g) = T_{lm}(g)\, M_k\,, \quad T_k(g)\, F_k = F_k\, T_{lm}(g)\,,$$

где $g \in G$. Мы называем операторы $M_k$ и $F_k$ *преобразованиями Пуассона и Фурье*, соответственно. Поскольку разложение (1.1) свободно от кратностей, образ оператора $M_k$ есть подпространство $W_k$, а оператор $F_k$ исчезает на всех $W_s$, исключая $W_k$. Следовательно, преобразования $M_k$ и $F_k$ определены однозначно с точностью до множителя. Композиция $F_k M_k$ есть скалярный оператор $V_k$ (умножение на число). Сначала мы построим $M_k$, а затем мы нормируем $F_k$ так, чтобы $F_k M_k = \mathrm{id}$, то есть $F_k$ на $W_k$ – обратный оператор для $M_k$:

$$F_k = M_k^{-1} \;\text{ на }\; W_k. \tag{1.5}$$

Многочлен $f \in V_{lm}$ восстанавливается по своим компонентам Фурье $\varphi_k = F_k f$ следующим образом:

$$f = \sum M_k \varphi_k\,.$$

Т е о р е м а 1.1. *Сплетающие операторы $M_k : V_k \to W_k$ даются следующей формулой:*

$$\begin{aligned}(M_k\varphi)\,(x,y) \;&=\; \sum_{s=0}^{k+r} \binom{k+r}{s} (k-r+1)^{[s]} \times \\ &\times\;\; (y-x)^{2m-s} \left(\frac{d}{dx}\right)^{k+r-s} \varphi(x).\end{aligned}$$

Отметим, что эти сплетающие операторы можно записать в виде композиции дифференциальных операторов первого порядка:

$$M_k = (y-x)^{l+m-k} \left\{ (y-x)\,\frac{d}{dx} + k - r + 1 \right\}^{[k+r]}\,,$$

а также с помощью одного дифференцирования:

$$(M_k\varphi)(x,y) = (y-x)^{l+m+k+1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{k+r}(y-x)^{-k+r-1}\,\varphi(x)\,.$$

Для функции $f(x,y)$ мы используем обозначение

$$f^{(a,b)} = \frac{\partial^{a+b} f}{\partial x^a\,\partial y^b}\,.$$

Т е о р е м а 1.2. *Преобразование Фурье* $F_k : V_{lm} \to V_k$ *(напомним, что* (1.5) *выполняется) дается следующей формулой. Пусть* $f(x,y)$ *– многочлен из* $V_{lm}$. *Тогда*

$$(F_k f)(t) = c_k \sum_{p=0}^{j} (-1)^{j-p}\binom{2l-j+p}{p}\binom{2m-p}{j-p} f^{(j-p,\,p)}(t,t), \tag{1.6}$$

*где* $j$ *дается формулой* (1.4) ,

$$c_k^{-1} = \frac{1}{2k+1}(l+m+k+1)^{(2m+1)}.$$

## § 2. Доказательство теоремы 1.1

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы $G$ состоит из вещественных матриц второго порядка со следом 0. Базис в ней состоит из матриц:

$$L^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad L^+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Соотношения коммутации таковы:

$$[L^+, L^-] = -2L^1\,, \quad [L^+, L^1] = -L^+\,, \quad [L^1, L^-] = -L^-\,.$$

Элемент Казимира $\Delta_{\mathfrak{g}}$ в $\mathfrak{g}$ есть

$$\Delta_{\mathfrak{g}} = (L^1)^2 + L^1 - L^-L^+.$$

Представления алгебры $\mathfrak{g}$, порожденные представлениями группы $G$, мы обозначаем теми же символами.

В представлении $T_k$ базисным элементам из $\mathfrak{g}$ отвечают операторы

$$T_k(L^-) = \frac{d}{dx}, \quad T_k(L_1) = x\,\frac{d}{dx} - k, \quad T_k(L^+) = x^2\,\frac{d}{dx} - 2k\,x,$$

элементу Казимира отвечает скалярный оператор (умножение на число):

$$T_k\,(\Delta_{\mathfrak{g}}) = k(k+1).$$

Следовательно, собственные числа элемента Казимира разделяют неприводимые представления.

Для упрощения записи обозначим

$$2l = \lambda, \quad 2m = \mu.$$

Числа $\lambda$ и $\mu$ – целые.

Разложим пространство $V_{lm}$ на подпространства $H_q$, $q = 0, 1, \ldots, \lambda + \mu$, собственные для оператора

$$T_{lm}(2L_1) = 2x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} - \lambda - \mu.$$

Подпространство $H_q$ состоит из однородных многочленов от $x, y$ степени однородности $q$, принадлежащих $V_{lm}$. Ограничение $L_q^1$ оператора $T_{lm}(L_1)$ на $H_q$ является скалярным оператором:

$$2L_q^1 = 2q - \lambda - \mu. \tag{2.2}$$

Базис в $H_q$ состоит из одночленов

$$x^q,\ x^{q-1}\,y,\ x^{q-2}\,y^2,\ \ldots,\ x^{q-\mu}\,y^\mu,$$

причем подразумевается, что отсутствуют одночлены, содержащие $x^i$, для которых $i < 0$ и $i > \lambda$. Следовательно, размерность пространства $H_q$ равна $\mu + 1$ для $\mu \leqslant q \leqslant \lambda$, равна $q + 1$ для $q \leqslant \mu$, равна $\lambda + \mu - q + 1$ для $q \geqslant \lambda$.

Оператор

$$T_{lm}(L^+) = x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y} - \lambda x - \mu y$$

переводит $H_q$ в $H_{q+1}$, обозначим его ограничение на $H_q$ через ${L^+}_q$, а оператор

$$T_{lm}(L^-) = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

переводит $H_q$ в $H_{q-1}$, обозначим его ограничение на $H_q$ через ${L^-}_q$. Поэтому оператор

$$R_q = {L^-}_{q+1}\,{L^+}_q$$

переводит $H_q$ в себя.

Найдем собственные векторы и собственные значения оператора $R_q$.

Возьмем следующие базисы $\{\xi_{q,\alpha}\}$ в $H_q$. Для $q \leqslant \lambda$ полагаем

$$\xi_{q,\alpha} = (y - x)^{\mu-\alpha} \cdot x^{\alpha-\mu+q},$$

здесь $\alpha = 0, 1, \ldots, \mu$ для $\mu \leqslant q \leqslant \lambda$ и $\alpha = \mu - q, \ldots, \mu$ для $q \leqslant \mu$. Для $q \geqslant \lambda$ полагаем

$$\xi_{q,\alpha} = (y - x)^{\mu-\alpha} \cdot x^{\alpha-\mu+\lambda} \cdot y^{q-\lambda},$$

здесь $\alpha = q - \lambda, \ldots, \mu$. Операторы ${L^+}_q$, ${L^-}_q$ действуют на эти базисы следующим образом:

$${L^+}_q\,\xi_{q,\alpha} = \begin{cases} (q - \lambda - \alpha)\,\xi_{q+1,\alpha} - \alpha\,\xi_{q+1,\alpha-1}, & q < \lambda, \\ (q - \lambda - \alpha)\,\xi_{q+1,\alpha}, & q \geqslant \lambda, \end{cases} \tag{2.3}$$

$${L^-}_q\,\xi_{q,\alpha} = \begin{cases} (\alpha - \mu + q)\,\xi_{q-1,\alpha}, & q \leqslant \lambda, \\ (\alpha - \mu + q)\,\xi_{q-1,\alpha} + (\alpha - \mu + \lambda)\,\xi_{q-1,\alpha-1}, & q > \lambda. \end{cases} \tag{2.4}$$

Поэтому

$$R_q\,\xi_{q,\alpha} = \begin{cases} (q - \lambda - \alpha)(\alpha - \mu + q + 1)\,\xi_{q,\alpha} - \alpha(\alpha - \mu + q)\,\xi_{q,\alpha-1}, & q \leqslant \lambda, \\ (q - \lambda - \alpha)\left[(\alpha - \mu + q + 1)\,\xi_{q,\alpha} + (\alpha - \mu + \lambda)\,\xi_{q,\alpha-1}\right], & q > \lambda. \end{cases} \tag{2.5}$$

Эти формулы (2.5) показывают, что оператор $R_q$ в базисе $\{\xi_{q,\alpha}\}$ в $H_q$ (индексы $\alpha$ расположены в возрастающем порядке) дается верхней треугольной двудиагональной матрицей.

Л е м м а 2.1. *Пусть* $A$ *– верхняя треугольная двудиагональная матрица порядка* $n$ *:*

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

*Она имеет следующие собственные векторы* $h_0, h_1, \dots, h_n$ *:*

$$\begin{aligned} & h_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots), \\ & h_1 = (b_0, a_1 - a_0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots), \\ & h_2 = (b_0 b_1,\, (a_2 - a_0) b_1,\, (a_2 - a_0)(a_2 - a_1), 0, 0, 0, 0, \dots), \\ & \dots \end{aligned}$$

Поэтому собственые векторы $w_{q,\alpha}$ оператора $R_q$ являются линейными комбинациями векторов $\xi_{q,i}$, $i \leqslant \alpha$. Собственное число оператора $R_q$, соответствующее вектору $w_{q,\alpha}$, есть $(q - \lambda - \alpha)(\alpha - \mu + q + 1)$. Нормируем $w_{q,\alpha}$ так, чтобы последние коэффициенты векторов $w_{q,\alpha}$, то есть коэффициенты при $\xi_{q,\alpha}$, не зависели от $q$. Тогда, как следует из (2.2), (2.3), (2.4), операторы $2L_q^1$, $L^+{}_q$, $L^-{}_q$ действуют на $w_{q,\alpha}$ следующим образом:

$$2L_q^1\, w_{q,\alpha} = (2q - \lambda - \mu)\, w_{q,\alpha}\,, \tag{6}$$

$$L^+{}_q\, w_{q,\alpha} = (q - \lambda - \alpha)\, w_{q+1,\alpha}\,, \tag{7}$$

$$L^-{}_q\, w_{q,\alpha} = (\alpha - \mu + q)\, w_{q-1,\alpha}\,. \tag{8}$$

Пусть $k$ принадлежит множеству (1.2). Построим оператор $M_k : V_k \to V_{lm}$ следующим образом. Положим

$$\alpha = k + r, \tag{2.9}$$

см (1.3). Возьмем в $V_k$ базис $1, x, x^2, \dots, x^{2k}$. Оператор $M_k$ сопоставляет одночлену $x^v$ вектор $w_{q,\alpha}$, где

$$q = \mu - \alpha + v = j + v, \tag{2.10}$$

см. (1.4). В силу (2.6)–(2.8) действие на векторы $w_{q,\alpha}$ операторов, отвечающих базисным элементам (2.1) в представлении $T_{lm}$, точно такое же, что и действие на одночлены $x^v$ операторов, отвечающих тем же базисным элементам (2.1) в представлении $T_k$. Кроме того, оператор, отвечающий элементу Казимира в представлении $T_{lm}$, умножает $w_{q,\alpha}$ на $k(k+1)$, так что вектор $w_{q,\alpha}$ принадлежит пересечению $H_q \cap W_k$. Следовательно, построенный оператор есть сплетающий изоморфизм $M_k : V_k \to W_k$.

Укажем явные выражения для $w_{q,\alpha}$. Для $\mu \leqslant q \leqslant \lambda$, используя лемму 2.1, возьмем

$$w_{q,\alpha} = \sum_{i=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} (\alpha - \mu + q)^{(\alpha - i)} (\alpha - \mu + \lambda + 1)^{[i]}\, \xi_{q,i}. \tag{2.11}$$

Тогда для $q > \lambda$ получим

$$w_{q,\alpha} = (\lambda - \mu + 2\alpha) \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} (\alpha - \mu + q - 1)^{(\alpha - i - 1)} (\alpha - \mu + q)^{[i]}\, \xi_{q,\, q - \lambda + i}\,,$$

где $\alpha = q - \lambda + s$, а для $q < \mu$ получим

$$w_{q,\alpha} = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} \alpha^{(s-i)} (\alpha - \mu + \lambda + 1)^{[\mu-q+i]} \xi_{q,\mu-q+i},$$

где $\alpha = \mu - q + s$.

Укажем явные выражения для оператора $M_k$. Поскольку он – дифференциальный оператор, достаточно рассмотреть $w_{q,\alpha}$ для $\mu \leqslant q \leqslant \lambda$, см. (2.11). Используя (2.9) и (2.10), мы представим $\xi_{q,i}$ в следующем виде

$$\begin{aligned} \xi_{q,i} &= (y-x)^{\mu-i} x^{i-\mu+q} \\ &= (y-x)^{\mu-i} x^{i+v-\alpha} \\ &= \frac{1}{v^{(\alpha-i)}} \cdot (y-x)^{\mu-i} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k+r-i} x^v. \end{aligned}$$

Подставляя это в (2.11), получим

$$M_k x^v = \sum_{i=0}^{k+r} \binom{k+r}{i} (k-r+1)^{[i]} (y-x)^{\mu-i} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k+r-i} x^v.$$

Это и доказывает теорему 1.1.

## § 3. Доказательство теоремы 1.2

Пространство $H_q^*$, сопряженное к $H_q$ (над $\mathbb{C}$), состоит из линейных функционалов $z$ на $H_q$. Нам достаточно будет рассматривать основной случай, то есть $\mu \leqslant q \leqslant \lambda$. Пространство $H_q^*$ можно отождествить с $\mathbb{C}^{\mu+1}$ следующм образом: значение функционала $z = (z_0, z_1, \ldots, z_\mu)$ на многочлене $f = \sum c_s x^{q-s} y^s$ из $H_q$ равно

$$\langle z, f \rangle = \sum_{s=0}^{\mu} z_s c_s.$$

Возьмем базис в $H_q^*$, состоящий из функционалов

$$\eta_{q,j} = (0^{(j)}, 1^{(j)}, 2^{(j)}, \ldots, \mu^{(j)}), \quad j = 0, 1, \ldots, \mu.$$

Функционал $\eta_{q,j}$ действует как дифференцирование:

$$\langle \eta_{q,j}, f \rangle = \left( \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f \right)(1,1). \tag{3.1}$$

Сопряженные операторы $(L^-{}_q)^*$, $(L^+{}_q)^*$ действуют на $\eta_{q,j}$ так:

$$(L^-{}_q)^* \eta_{q,j} = (q-j)\, \eta_{q-1,j},$$

$$(L^+{}_q)^* \eta_{q,j} = (j - \mu - \lambda + q)\, \eta_{q+1,j} + j\,(j-\mu-1)\, \eta_{q+1,j-1}.$$

Поэтому

$$R_q^* \eta_{q,j} = (q+1-j)\big\{(j-\mu-\lambda+q)\, \eta_{q,j} + j\,(j-\mu-1)\, \eta_{q,j-1}\big\}. \tag{3.2}$$

Формула (3.2) показывает, что оператор $R_q^*$ в базисе $\{\eta_{q,j}\}$ в $H_q^*$ дается верхней треугольной двудиагональной матрицей. Поэтому его собственые векторы $z_{q,j}$ являются линейными комбинациями векторов $\eta_{q,i}$, $i \leqslant j$. Мы получаем (с помощью леммы 2.1):

$$z_{q,j} = \sum_{s=0}^{j} (-1)^s \binom{j}{s} (\mu - s)^{(j-s)} (q-s)^{(j-s)} (\lambda + \mu - j + 1)^{(s)} \eta_{q,s}.$$

Собственное число оператора $R_q^*$, соответствующее собственному вектору $z_{q,j}$, есть $(q+1-j)(j-\mu-\lambda+q)$. Сравнивая с оператором $R_q$, видим, что это собственное число совпадает с собственным числом оператора $R_q$, отвечающим вектору $w_{q,\alpha}$, где $\alpha = \mu - j$. Поэтому базис $\{z_{q,j}\}$ ортогонален базису $\{w_{q,\alpha}\}$. Соотношения ортогональности таковы:

$$\langle z_{q,j}, w_{q,\alpha} \rangle = \begin{cases} \varepsilon_k, & \alpha = \mu - j, \\ 0, & \alpha \neq \mu - j, \end{cases} \tag{3.3}$$

где

$$\varepsilon_k = (-1)^j \, j! \, \frac{(k-r+1)^{[\mu+1]}}{2k+1}, \quad j = l + m - k, \tag{3.4}$$

см. (1.4), (1.3).

Собственный вектор $z_{q,j}$ порождает отображение $Z_k$, $k = l+m-j$, пространства $V_{lm}$ в пространство $V_k$, а именно, $Z_k$ сопоставляет многочлену $f \in H_q$ одночлен

$$(Z_k f)(x) = \langle z_{q,j}, f \rangle \cdot x^{q-j}.$$

Для $f \in H_q$ имеем

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^s f\right)(1,1) \cdot x^{q-s} = \left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^s f\right)(x,x),$$

Поэтому, в силу (3.3) и (3.1), получаем

$$(Z_k f)(x) = \sum_{s=0}^{j} (-1)^s \binom{j}{s} (\mu - s)^{(j-s)} \times \\ \times (\lambda + \mu - j + 1)^{(s)} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{j-s} \left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^s f\right)(x,x). \tag{5}$$

Повторное дифференцирование здесь равно сумме:

$$\sum_{p=0}^{j-s} \binom{j-s}{p} f^{(p,\, j-p)}(x,x).$$

Подставим это в (3.5) и изменим порядок суммирования. Мы получим

$$(Z_k f)(x) = \sum_{p=0}^{j} f^{(p,\, j-p)}(x,x) \times \\ \times \sum_{s=0}^{j-p} (-1)^s \binom{j}{s} \binom{j-s}{p} (\mu - s)^{(j-s)} (\lambda + \mu - j + 1)^{(s)}. \tag{6}$$

Внутренняя сумма здесь равна

$$\binom{j}{p}(\mu-j+1)^{[p]}\sum_{s=0}^{j-p}\binom{j-p}{s}(\mu-j+p+1)^{[j-p-s]}(-\lambda-\mu+j-1)^{[s]}. \qquad (3.7)$$

Она сворачивается с помощью биномиальной формулы для обобщенных степеней, так что (3.7) равно

$$\binom{j}{p}(\mu-j+1)^{[p]}\,(-\lambda+p)^{[j-p]},$$

поэтому, по (3.6),

$$(Z_k f)(x)=\sum_{p=0}^{j}\binom{j}{p}(\mu-j+1)^{[p]}\,(-\lambda+p)^{[j-p]}\,f^{(p,\,j-p)}(x,x).$$

Заменим $p$ на $j-p$, используем $(-\lambda+j-p)^{[p]}=(-1)^p(\lambda-j+p)^{(p)}$ и перейдем от обобщенных степеней к биномиальным коэффициентам, получим:

$$(Z_k f)(x)=j!\sum_{p=0}^{j}(-1)^p\binom{\mu-p}{j-p}\binom{\lambda-j+p}{p}f^{(j-p,\,p)}(x,x). \qquad (3.8)$$

Из (3.3) следует, что отображение $Z_k$ обращается в нуль на всех векторах $w_{q,\alpha}$, для которых $\alpha\neq\mu-j$, а вектор $w_{q,\mu-j}$ оно переводит в $\varepsilon_k\cdot x^{q-j}$, см. (3.4). Следовательно, отображение $\varepsilon_k^{-1}\cdot Z_k$ является обратным отображением для преобразования Пуассона $M_k$ : $V_k\to W_k$ и потому совпадает с преобразованием Фурье $F_k$. Формула (3.8) дает формулу (1.6), поскольку $\varepsilon_k^{-1}\cdot j!=c_k(-1)^j$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Молчанов В.Ф.* Преобразования Пуассона для тензорных произведений представлений группы матриц второго порядка // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 5. С. 2613–2616.

2. *Молчанов В.Ф., Сарычева Е.В.* О тензорных произведениях представлений группы матриц второго порядка // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 1. С. 120–124.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ 13-01-00952-а, Госзаданием Министерства образования и науки 2014/285, проект № 2476 и Фондом содействия отечественной науке

Поступила в редакцию 16 мая 2015 г.

Molchanov V.F., Evseeva E.V. POISSON AND FOURIER TRANSFORMS FOR TENSOR PRODUCTS OF REPRESENTATIONS OF THE SECOND ORDER MATRIX GROUP

We compute explicitly intertwining operators that decompose tensor products of irreducible finite-dimensional representations of the group $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ into irreducible constituents. These operators turn out to be differential operators. We use another method in comparison with previous papers.

*Keywords*: Lie groups and Lie algebras; representations of Lie groups; tensor products; intertwinning operators.

Молчанов Владимир Федорович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, e-mail: v.molchanov@bk.ru

Molchanov Vladimir Fedorovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, the Head of the Mathematical Analysis Department, e-mail: v.molchanov@bk.ru

Евсеева Елена Витальевна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант кафедры математического анализа, e-mail: evseeva.elena@gmail.com

Evseeva Elena Vitalievna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Mathematical Analysis Department, e-mail: evseeva.elena@gmail.com

УДК 517.929

# УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО АВТОНОМНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМ И РАСПРЕДЕЛЁННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

**© М.В. Мулюков**

*Ключевые слова*: уравнения с запаздыванием; асимптотическая устойчивость; равномерная устойчивость; эффективные признаки.

Для одного линейного автономного дифференциального уравнения с сосредоточенным и распределённым запаздыванием получен критерий асимптотической и равномерной устойчивости. Критерий представлен в виде области в пространстве коэффициентов уравнения.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-h) + c\int_{t-2h}^{t} x(s)ds = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $h > 0$. При отрицательных значениях аргумента полагаем решение доопределённым произвольной локально суммируемой функцией.

Уравнения, содержащие распределённое и сосредоточенное запаздывание, возникают в результате линеаризации нелинейных моделей, описывающих, как правило, динамику популяции. В работах [1–7] изучались уравнения, близкие к (1).

Уравнение (1) представляет интерес как самостоятельный объект исследования, так и в связи с изучением системы двух линейных автономных дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздыванием вида

$$\dot{y}(t) + Ay(t) + By(t-h) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где $A, B$ — вещественные $2 \times 2$-матрицы, удовлетворяющие условиям $\det A + \det B = \det(A + B) = 0$. Вопрос устойчивости системы (2) с теми или иными условиями рассматривался в работах [8–14].

Асимптотическая устойчивость, эквивалентная экспоненциальной в силу автономности, для уравнения (1) и системы (2) означает, что все корни соответствующей характеристической функции лежат слева от мнимой оси. Устойчивость по Ляпунову, эквивалентная