

О СВОЙСТВАХ КВАДРАТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

© С. Е. Жуковский, Ч. Т. Нгок, Л. И. Нгомиракиза

Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru, ngoc2tt@gmail.com, nglain@yandex.ru

В работе исследованы свойства квадратичных отображений. Доказано, что квадратичные отображения, не имеющие нетривиальных нулей, имеют нетривиальные неподвижные точки. Получены достаточные условия существования обратной функции для дважды дифференцируемого отображения, первая производная которого вырождается. *Ключевые слова:* квадратичное отображение; неподвижная точка; обратная функция

Введение

В настоящей работе исследуются свойства квадратичных отображений вещественных конечномерных пространств. Напомним определение квадратичного отображения.

Отображение $Q: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ называется *билинейным*, если отображения $Q[x, \cdot]$ и $Q[\cdot, x]: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ линейны для любого $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть $Q: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ – билинейное отображение. Оно называется *симметричным*, если $Q[x, u] \equiv Q[u, x]$. Пусть $Q: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ – симметричное билинейное отображение. Отображение, которое каждому вектору $x \in \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие вектор $Q[x, x]$, называется квадратичным отображением. Здесь и далее мы будем обозначать символом Q и квадратичное отображение и порождающее его билинейное отображение. При этом образ точки $x \in \mathbb{R}^n$ при квадратичном отображении будем обозначать через $Q(x)$, а образ точки $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ при билинейном отображении Q – через $Q[x, u]$. Отображение Q является квадратичным тогда и только тогда, когда существуют квадратичные формы $q_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1, k}$, такие что $Q(x) \equiv (q_1(x), \dots, q_k(x))$.

В первом параграфе настоящей работы мы изучим некоторые свойства квадратичных отображений. В частности, получим условия существования нетривиальной неподвижной точки для квадратичных отображений $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Утверждения о свойствах квадратичных отображений имеют важные приложения. Они используются при исследовании нелинейных отображений в окрестности аномальной точки (см., например, [1]). Поясним сказанное на примере задачи об обратном отображении.

Пусть дано отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$. Известно (см., например, [2], приложение II, следствие 1), что если отображение f дифференцируемо в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, непрерывно в некоторой её окрестности, и выполняется условие регулярности

$$f'(x_0)\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k, \quad (1)$$

то существует обратное к f отображение в окрестности точки $(x_0, f(x_0))$, т. е. существуют окрестность U точки $f(x_0)$ и отображение $R: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что

$$R(f(x_0)) = x_0, \quad f(R(y)) \equiv y, \quad \text{и} \quad R \text{ непрерывно в точке } f(x_0). \quad (2)$$

При этом при некотором $c \geq 0$ выполняется $|R(y) - x_0| \leq c|y - f(x_0)|$ при любом $y \in U$.

Пусть теперь условие регулярности (1) нарушено, т. е. линейный оператор $f'(x_0)$ вырожден. В этом случае приведенная выше теорема об обратном отображении неприменима к отображению f в точке x_0 . Тем не менее условия существования обратной функции можно сформулировать в терминах второй производной отображения f в точке x_0 , которая является квадратичным отображением. Для того чтобы сделать это напомним одно определение.

Вектор $h \in \mathbb{R}^n$ называется *регулярным нулем квадратичного отображения* $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, если $Q(h) = 0$ и $Q[h, \mathbb{R}^n] = \mathbb{R}^k$.

Приводимый ниже результат является простым следствием теорем об обратной функции из [1] (см. теорему 6.7) и [3] (см. теорему 1).

Т е о р е м а 1. Пусть отображение f дважды непрерывно дифференцируемо в окрестности точки x_0 , $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0)$ имеет регулярный ноль. Тогда существует обратное к f отображение $R(\cdot)$ в окрестности точки $(x_0, f(x_0))$. При этом обратное отображение R непрерывно и при некотором $c \geq 0$ выполняется неравенство $|R(y) - x_0| \leq c\sqrt{|y - f(x_0)|}$.

Отметим, что теоремы об обратной функции из [1] и [3] доказаны при гораздо более общих предположениях на отображение f . В частности в [1] и [3] не предполагается вырождения $f'(x_0)$. Во втором параграфе этой статьи мы изучим вопрос о существовании обратной функции в предположении $f'(x_0) = 0$, но при ослабленных предположениях гладкости отображения f . Мы покажем, что при ослаблении предположений гладкости отображения f обратное к f отображение существует, но может не быть непрерывным.

1. Точки совпадения четного и нечетного отображения

Пусть $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – квадратичное отображение. Неподвижной точкой отображения Q стандартно назовем точку $x \in \mathbb{R}^n$ такую, что $x = Q(x)$. Очевидно, что любое квадратичное отображение Q имеет нуль своей неподвижной точкой. Следующее утверждение дает необходимые условия существования нетривиальной (т. е. отличной от нуля) неподвижной точки квадратичного отображения.

Т е о р е м а 2. Пусть квадратичное отображение $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ не имеет нетривиальных нулей. Тогда существует точка $x \neq 0$ такая, что $x = Q(x)$.

Прежде чем доказать эту теорему, приведем вспомогательное утверждение.

Обозначим через S^n единичную сферу в $\mathbb{R}^{n+1}$, т. е.

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

Стандартно будем называть отображение $\varphi: S^n \rightarrow S^n$ *четным*, если $\varphi(x) = \varphi(-x)$ для любых $x \in S^n$, и *нечетным*, если $-\varphi(x) = \varphi(-x)$ для любых $x \in S^n$. Топологическую степень бесконечно дифференцируемого отображения $f: S^n \rightarrow S^n$ будем обозначать через $\deg(f)$. Напомним, что напрямую из определения топологической степени (см., например, [4], §5) следует, что $\deg(\varphi)$ четно, если четно отображение φ . Для нечетного отображения ψ теорема Люстерника-Шнирельмана-Борсука (см., например, [5], теорема 2.4) утверждает, что $\deg(\psi)$ нечетно.

Л е м м а 1. Пусть $\psi, \varphi: S^n \rightarrow S^n$ – бесконечно дифференцируемые отображения, φ четно, а ψ нечетно. Тогда существует точка $x \in S^n$ такая, что $\psi(x) = \varphi(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, т. е. $\psi(x) \neq \varphi(x)$ для любого $x \in S^n$. Зададим отображение $F: S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$ по формуле

$$F(x, t) := \frac{\psi(x) - (\psi(x) + \varphi(x))t}{|\psi(x) - (\psi(x) + \varphi(x))t|}.$$

Отображение F определено корректно, поскольку $|\psi(x) - (\psi(x) + \varphi(x))t| \neq 0$ для любого $(x, t) \in S^n \times [0, 1]$. Действительно, если для некоторого $(x, t) \in S^n \times [0, 1]$ выполняется равенство $\psi(x) - t(\psi(x) + \varphi(x)) = 0$, то $(1-t)\psi(x) = t\varphi(x)$, т. е. векторы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются сонаправленными. А так как они являются единичными, то $\varphi(x) = \psi(x)$, что противоречит исходному предположению.

Отображение F является гладким. Это следует из того, что F является композицией гладких отображений $(t, x) \mapsto \psi(x) - (\psi(x) + \varphi(x))t$ и $y \mapsto |y|^{-1}$, $y \neq 0$.

Очевидно, что $F(\cdot, 0) = \psi(\cdot)$ и $F(\cdot, 1) = -\varphi(\cdot)$. Таким образом, отображение F является гладкой гомотопией, связывающей ψ с φ . Следовательно, $\deg(\psi) = \deg(-\varphi)$. Но, как отмечалось выше, $\deg(\psi)$ нечетно, а $\deg(-\varphi)$ четно. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Перейдем к доказательству основного утверждения настоящего параграфа.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Положим $\varphi(x) := Q(x)/|Q(x)|$, $x \in S^n$. Отображение φ является гладким, как композиция гладких отображений, и четным, поскольку Q четно. Положим $\psi(x) := x$, $x \in S^n$. Очевидно, что отображение ψ является гладким и нечетным. Из леммы 1 следует, что существует точка $\tilde{x} \in S^n$ такая, что $\psi(\tilde{x}) = \varphi(\tilde{x})$. В силу определения отображений ψ и φ ненулевые векторы $\tilde{x}$ и $Q(\tilde{x})$ являются сонаправленными. Следовательно, найдется $t > 0$ такое, что $t\tilde{x} = Q(\tilde{x})$. Положим $x := \tilde{x}/t$. Тогда

$$Q(x) = \frac{Q(\tilde{x})}{t^2} = \frac{t\tilde{x}}{t^2} = x. \quad \square$$

2. Регулярные нули квадратичных отображений и обратные функции

Во введении мы сформулировали определение регулярного нуля квадратичного отображения. Существование регулярного нуля у квадратичного отображения $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ гарантирует, что у этого отображения есть ряд "хороших" свойств. В частности, если Q имеет регулярный нуль, то оно сюръективно, и, более того, существует отображение $R: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ и число $c > 0$ такие, что

$$R(0) = 0, \quad Q(R(y)) \equiv y, \quad R \text{ непрерывно, и } |R(y)| \leq c\sqrt{|y|}. \quad (3)$$

Этот факт напрямую следует из теоремы 1 и положительной однородности квадратичных отображений. Указанное здесь отображение R является правым обратным к Q . Используя приведенное свойство квадратичных отображений, можно показать, что имеет место следующая теорема об обратной функции.

Т е о р е м а 3. Пусть задано отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ и точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что f дважды дифференцируемо в точке x_0 , непрерывно в окрестности этой точки, и $f'(x_0) = 0$. Если квадратичное отображение $f''(x_0)$ имеет регулярный нуль, то существует окрестность $U \subset \mathbb{R}^k$ точки x_0 , число $c > 0$ и функция $R: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что выполняются соотношения (2) и

$$|R(y) - x_0| \leq c\sqrt{|y - f(x_0)|} \quad \forall y \in U. \quad (4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не теряя общности, будем полагать, что $x_0 = 0$ и $f(0) = 0$. Тогда f дважды дифференцируемо в нуле, непрерывно в окрестности нуля, и $f'(0) = 0$. Отсюда следует, что

$$f(x) = \frac{1}{2}f''(0)[x, x] + o(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

где o – некоторое непрерывное отображение такое, что

$$\frac{o(x)}{|x|^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

Поскольку квадратичное отображение $Q := f''(x)/2$ имеет регулярный нуль, как было отмечено выше, существует отображение $\tilde{R}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ и число $\tilde{c} > 0$ такие, что выполняются соотношения (3), т. е.

$$\tilde{R}(0) = 0, \quad Q(\tilde{R}(y)) \equiv y, \quad \tilde{R} \text{ непрерывно, и } |\tilde{R}(y)| \leq \tilde{c}\sqrt{|y|}.$$

Для каждого $y \in \mathbb{R}^k$ рассмотрим уравнение

$$x = \tilde{R}(y - o(x)) \quad (5)$$

с неизвестным $x \in \mathbb{R}^n$. Отметим, что если некоторая точка x является его решением, то $f(x) = Q(x) + o(x) = Q(\tilde{R}(y - o(x))) + o(x) = y$. Обозначим через $R(y)$ решение уравнения (5). Далее мы покажем, что отображение R является искомым.

Выберем произвольное положительное число γ такое, что $\gamma < 1/\tilde{c}$. Поскольку $o(x)/|x|^2 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, то существует число $\delta > 0$ такое, что

$$|\omega(x)| < \gamma^2|x|^2 \quad \forall x \in \delta B.$$

Здесь B – это замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле единичного радиуса.

Для каждого $y \in (-\gamma\delta + \delta/\tilde{c})^2 B$ положим

$$r(y) := \frac{\sqrt{|y|}}{-\gamma + 1/\tilde{c}}.$$

Рассмотрим отображение $f_y: r(y)B \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенное по формуле

$$f_y(x) := \tilde{R}(y - o(x)) \quad \forall x \in r(y)B.$$

Покажем, что оно переводит $r(y)B$ в себя. Пусть $x \in r(y)B$. Тогда

$$|x| \leq \frac{\sqrt{|y|}}{1/\tilde{c} - \gamma} \leq \frac{\sqrt{(\delta/\tilde{c} - \gamma\delta)^2}}{1/\tilde{c} - \gamma} \leq \delta.$$

Поэтому $|\omega(x)| < \gamma^2|x|^2$ и, значит,

$$\begin{aligned} |\tilde{R}(y - \omega(x))| &\leq \tilde{c}\sqrt{|y - \omega(x)|} \leq \tilde{c}\sqrt{|y| + |\omega(x)|} \leq \tilde{c}(\sqrt{|y|} + \sqrt{|\omega(x)|}) \leq \\ &\leq \tilde{c}(\sqrt{|y|} + \sqrt{\gamma^2|x|^2}) \leq \tilde{c}(\sqrt{|y|} + \gamma r(y)) \leq \tilde{c}\left(\sqrt{|y|} + \gamma \frac{\sqrt{|y|}}{1/\tilde{c} - \gamma}\right) = \frac{\sqrt{|y|}}{1/\tilde{c} - \gamma} = r(y). \end{aligned}$$

Следовательно, f_y переводит $r(y)B$ в себя. По теореме Брауэра о неподвижной точке существует точка $x = R(y)$, являющаяся решением уравнения (5).

Итак, значение $R(y)$ определено для y из окрестности нуля, и $f(R(y)) \equiv y$. Поскольку по построению $R(y) \in r(y)B$, то

$$|R(y)| \leq r(y) = \frac{\tilde{c}}{1 - \gamma\tilde{c}}\sqrt{|y|}.$$

Из полученной оценки также следует, что $R(0) = 0$. Значит построенное отображение R является искомым. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов А.В. Гладкие аномальные задачи теории экстремума и анализа // УМН. 2012. Т. 67. №. 3. С. 3–62.
2. Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Принцип максимума Понтрягина. М.: Факториал Пресс, 2006.
3. Аваков Е.Р., Арутюнов А.В. Теорема об обратной функции и условия экстремума для аномальных задач с незамкнутым образом // Математический сборник. 2005. Т. 196. № 9. С. 3–22.
4. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир, 1972.
5. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956.

БЛАГОДАРНОСТИ: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01168).

Поступила в редакцию 20 апреля 2017 г

Жуковский Сергей Евгеньевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Чан Тхи Нгок, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, студент, факультет физико-математических и естественных наук, e-mail: ngoc2tt@gmail.com

Нгомиракиза Ларри-Элвис Инносентович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, студент, факультет физико-математических и естественных наук, e-mail: nglain@yandex.com

UDC 517.275

DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-533-538

ON QUADRATIC MAPPINGS PROPERTIES AND CONDITIONS FOR INVERSE FUNCTIONS EXISTENCE

© S. E. Zhukovskiy, Ch. T. Ngok, L. I. Ngomirakiza

RUDN University

6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198

E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru, ngoc2tt@gmail.com, nglain@yandex.ru

Some properties of quadratic mappings are studied. It is proved that if a quadratic mapping have no nontrivial zeroes then it has nontrivial fixed points. Sufficient conditions for inverse function existence are obtained for smooth mappings in the case when the first derivative vanishes.

Key words: quadratic mapping; fixed point; inverse function

REFERENCES

1. *Arutyunov A.V.* Smooth abnormal problems in extremum theory and analysis // Russian Mathematical Surveys. 2012. V. 67. Iss. 3. P. 403–457.
2. *Arutyunov A.V., Magaril-Ilyayev G.G., Tikhomirov V.M.* Pontryagin's maximum principle. Moscow, Factorial-Press, 2006.
3. *Avakov E.R., Arutyunov A.V.* Inverse function theorem and conditions of extremum for abnormal problems with non-closed range // Sb. Math. 2005. V. 196. Iss. 9. P. 1251–1269.
4. *Milnor J.W., Wallace A.H.* Differential Topology. Basic course. Moscow, Mir, 1972.
5. *Krasnosel'skii M.A.* Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations, Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1956.

ACKNOWLEDGEMENTS: The investigation was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project № 17-11-01168).

Received 20 April 2017

Zhukovskiy Sergey Evgen'evich, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Chan Thi Ngok, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Student, Faculty of Science, e-mail: ngoc2tt@gmail.com

Ngomirakiza Larry-Elvis Innosentovich, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Student, Faculty of Science, e-mail: nglain@yandex.com

Информация для цитирования:

Жуковский С.Е., Нгок Ч.Т., Нгомиракиза Л.И. О свойствах квадратичных отображений и условиях существования обратных функций // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 3. С. 533–538. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-533-538

Zhukovskiy S.E., Ngok Ch.T., Ngomirakiza L.I. O svoystvakh kvadratischnih otobrazheniy i usloviyah suschestvovaniya obratnih funktsiy [On quadratic mappings properties and conditions for inverse functions existence]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no 3, pp. 533–538. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-533-538 (In Russian)