УДК 517.922
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1983-1989

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЯВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© **С. Е. Жуковский, З. Т. Жуковская**

Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Рассмотрена краевая задача для неявного дифференциального включения. Для нее в терминах накрывающих и липшицевых многозначных отображений получены достаточные условия существования решений.
Ключевые слова: неявное дифференциальное включение; краевая задача; накрывающее отображение

1. Постановка задачи

Пусть заданы число $T>0$ и многозначные отображения $F:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^k$, $G:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^m$ (т. е. отображения, которые каждой точке области определения ставят в соответствие некоторое непустое замкнутое множество). Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} 0\in F(t,x,\dot{x}) \quad \dot{\forall} t\in[0,T], \\ 0\in G(x(0),x(T)). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\dot{\forall}$ означает "для почти всех". Обозначим через L_∞^n множество всех измеримых существенно ограниченных функций $u:[0,T]\to\mathbb{R}^n$, а через AC_∞^n – множество всех абсолютно непрерывных функций $x:[0,T]\to\mathbb{R}^n$ таких, что $\dot{x}(\cdot)\in L_\infty^n$. Здесь и далее через $\dot{x}(t)$ мы обозначаем производную функции x в точке $t\in(0,T)$. Под *решением задачи (1)* мы будем понимать функцию $x(\cdot)\in AC_\infty^n$ такую, что $0\in F(t,x(t),\dot{x}(t))$ для почти всех $t\in[0,T]$ и $0\in G(x(0),x(T))$.

В настоящей работе мы сформулируем достаточные условия существования решения задачи (1) в следующих предположениях:

- отображение $F(\cdot,x,u)$ измеримо для всех $x,u\in\mathbb{R}^n$;
- отображение $F(t,\cdot)$ непрерывно для почти всех $t\in[0,T]$;
- для каждого $R>0$ существует число $M>0$ такое, что
$$|x|+|u|\le R \Rightarrow |y|\le M \quad \forall\, y\in F(t,x,u), \quad \dot{\forall}\, t\in[0,T].$$
- отображение $G(\cdot)$ непрерывно.

Прежде, чем сформулировать основной результат настоящей работы напомним некоторые определения.

2. Вспомогательные сведения. Свойства многозначных отображений

Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) – метрические пространства, числа $\alpha>0$, $\beta\geq 0$ заданы. Многозначное отображение $\Psi: X\rightrightarrows Y$ называется α*-накрывающим*, если

$$\forall\, x_0\in X,\ y_0\in\Psi(x_0),\ y\in Y\quad \exists\, x\in X:\quad y\in\Psi(x)\quad \text{и}\quad \rho_X(x_0,x)\leq\frac{\rho_Y(y_0,y)}{\alpha}.$$

Многозначное отображение $\Psi: X\rightrightarrows Y$ будем называть *непрерывным,* если оно непрерывно в смысле расстояния по Хаусдорфу h_Y. Расстояние по Хаусдорфу $h_Y(A,B)$ между непустыми множествами $A,B\subset Y$ определяется равенством

$$h_Y(A,B)=\max\bigl\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\rho_Y(a,b),\sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\rho_Y(a,b)\bigr\}.$$

Таким образом непрерывность многозначного отображения $\Psi: X\rightrightarrows Y$ равносильна тому, что для любой точки $x\in X$ и любой сходящейся к ней последовательности $\{x_n\}\subset X$ выполняется соотношение $h_Y(\Psi(x_n),\Psi(x))\to 0$ при $n\to\infty$. Многозначное отображение $\Psi: X\rightrightarrows Y$ называется β*-липшицевым,* если

$$h_Y(\Psi(x),\Psi(u))\leq\beta\rho_X(x,u)\quad \forall\, x,u\in X.$$

Определим на множестве $X\times Y$ метрику по формуле

$$\rho_{X\times Y}\bigl((x,y),(u,v)\bigr):=\rho_X(x,u)+\rho_Y(y,v)\quad \forall\,(x,y),(u,v)\in X\times Y.$$

Очевидно, что пара $(X\times Y,\rho_{X\times Y})$ является метрическим пространством. Многозначное отображение $\Psi: X\rightrightarrows Y$ называют *замкнутым*, если множество

$$\mathrm{gph}(\Psi):=\{(x,y):\, x\in X,\quad y\in\Psi(x)\}$$

замкнуто в $X\times Y$.

Многозначное отображение $\Psi:[0,T]\rightrightarrows\mathbb{R}^k$, принимающее компактные значения, называется *измеримым,* если для любого открытого множества $V\subset\mathbb{R}^k$ множество

$$\Psi^{-1}(V):=\{t\in[0,T]:\,\Psi(t)\cap V\neq\emptyset\}$$

измеримо по Лебегу.

3. Основной результат

Сформулируем достаточные условия существования решения задачи (1).

Т е о р е м а 1. *Предположим, что*
a) многозначное отображение $F(t,x,\cdot)$ *является* α_F*-накрывающим при почти всех* $t\in[0,T]$, *при всех* $x\in\mathbb{R}^n$;
b) многозначное отображение $F(t,\cdot,u)$ *является* β_F*-липшицевым при почти всех* $t\in[0,T]$, *при всех* $u\in\mathbb{R}^n$;
c) многозначное отображение $G(\cdot,b)$ *является* α_G*-накрывающим при всех* $b\in\mathbb{R}^n$;
d) многозначное отображение $G(a,\cdot)$ *является* β_G*-липшицевым при всех* $a\in\mathbb{R}^n$.
Если

$$\frac{\beta_F}{\alpha_F}T+\frac{\beta_G}{\alpha_G}<1, \tag{2}$$

то задача (1) имеет решение.

Аналогичная задача в случае, когда отображения F и G "однозначны", рассматривалась в [1]. Основным инструментом выведения условий разрешимости краевой задачи в [1] послужил аппарат теории накрывающих отображений. Теория накрывающих отображений широко используется при исследовании нелинейных уравнений. Так в [2]–[5] накрывающие отображения использовались для получения условий существования и исследования свойств точек совпадения отображений в метрических пространствах. Для выведения условий существования решений неявных обыкновенных дифференциальных уравнений накрывающие отображения использовались в [6], [7]. Средствами теории накрывающих отображений в [8] были исследованы абстрактные и интегральные уравнения Вольтерра, а в [9]–[11] – управляемые системы.

Основной результат настоящей статьи мы докажем методами, разработанными в перечисленных выше работах. Для этого напомним сначала некоторые вспомогательные утверждения.

4. Вспомогательные утверждения

Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) – метрические пространства, задано отображение $\Gamma : X\times X\to Y$, точка $y\in Y$, числа $\alpha>0$, $\beta\geq 0$ заданы.

Л е м м а 1. (см. [12]) *Предположим, что*
a) для любого $x\in X$ *многозначное отображение* $\Gamma(x,\cdot)$ *является* α*-накрывающим;*
b) для любого $x\in X$ *многозначное отображение* $\Gamma(\cdot,x)$ *является* β*-липшицевым,* $\beta<\alpha$*;*
c) пространство X *полно, отображение* Γ *замкнуто.*

Тогда для любого $\delta>0$ *многозначное отображение*

$$x\mapsto \Gamma(x,x),\quad x\in X,$$

является $(\alpha-\beta-\delta)$*-накрывающим.*

Пусть X_1,X_2,Y_1,Y_2 – метрические пространства, метрики в которых мы будем обозначать символом ρ, заданы многозначные отображения $F_j : X_1\times X_2\rightrightarrows Y_j$ и точки $y_j\in Y_j$, $j\in\{1,2\}$. Рассмотрим систему включений

$$\begin{cases} y_1\in F_1(x_1,x_2),\\ y_2\in F_2(x_1,x_2)\end{cases} \tag{3}$$

с неизвестным $(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$. Приведем достаточные условия разрешимости этой системы.

Л е м м а 2 (см. [13]). *Пусть пространства* X_j, Y_j *полны,* $j\in\{1,2\}$. *Пусть*

a) $F_1(\cdot,x_2)$ *и* $F_2(x_1,\cdot)$ *являются замкнутыми и накрывающими с константами* $\alpha_1>0$ *и* $\alpha_2>0$, *соответственно, для любых* $x_1\in X_1$, $x_2\in X_2$;

b) отображения $F_1(x_1,\cdot)$ *и* $F_2(\cdot,x_2)$ *являются липшицевыми с константами* $\beta_1\geq 0$ *и* $\beta_2\geq 0$, *соответственно, для любых* $x_1\in X_1$, $x_2\in X_2$;

c) $\beta_1\beta_2<\alpha_1\alpha_2$.

Тогда система (2) имеет решение, т. е. существуют $\xi_1\in X_1$, $\xi_2\in X_2$ *такие, что*

$$\begin{cases} y_1\in F_1(\xi_1,\xi_2),\\ y_2\in F_2(\xi_1,\xi_2).\end{cases}$$

Более того, для любых $(\overline{x}_1,\overline{x}_2)\in X_1\times X_2$, $\overline{y}_1\in F_1(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$, $\overline{y}_2\in F_2(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$, $y_1\in Y_1$, $y_2\in Y_2$, $\varepsilon>0$ *существует решение* $(\xi_1,\xi_2)\in X_1\times X_2$ *системы (2) такое, что*

$$\rho(\overline{x}_1,\xi_1)\le\frac{\beta_1\rho(y_2,\overline{y}_2)+\alpha_2\rho(y_1,\overline{y}_1)}{\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2}+\varepsilon;$$

$$\rho(\overline{x}_2,\xi_2)\le\frac{\alpha_1\rho(y_2,\overline{y}_2)+\beta_2\rho(y_1,\overline{y}_1)}{\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2}+\varepsilon.$$

Пусть задано многозначное отображение $P:[0,T]\times\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^k$. Зададим многозначный оператор Немыцкого $\mathcal{N}_P:L_\infty^n\rightrightarrows L_\infty^k$ формулой

$$\mathcal{N}_P(\omega)=\{y\in L_\infty^k:\ y(t)\in P(t,\omega(t))\quad \dot{\forall}\, t\in[0,T]\}\quad \forall\,\omega\in L_\infty^n.$$

Л е м м а 3 (см. [13]). *Предположим, что многозначное отображение* P *удовлетворяет условиям Каратеодори:*
a) для почти всех $t\in[0,T]$ *многозначное отображение* $P(t,\cdot)$ *непрерывно;*
b) для всех $x\in\mathbb{R}^n$ *многозначное отображение* $P(\cdot,x)$ *измеримо;*
c) для каждого $R>0$ *существует* $M>0$ *такое, что если* $|x|\le R$, *то* $|y|\le M$ *для всех* $y\in P(t,x)$ *и для почти всех* $t\in[0,T]$.
Тогда

1) *многозначное отображение* $\mathcal{N}_P$ *определено корректно и является замкнутым;*

2) *если для почти всех* $t\in[t_0,T]$ *многозначное отображение* $P(t,\cdot)$ *является* α*-накрывающим, то* $\mathcal{N}_P$ *также является* α*-накрывающим.*

Зададим многозначный интегральный оператор $\mathcal{I}_P:L_\infty^n\rightrightarrows L_\infty^k$ формулой

$$\mathcal{I}_P(\omega)=\left\{y\in L_\infty^k:\ y(t)\in P\left(t,a+\int_0^t\omega(s)ds\right)\quad \dot{\forall}\, t\in[0,T]\right\}$$

для любого $\omega\in L_\infty^n$.

Л е м м а 4 (см. [13]). *Предположим, что многозначное отображение* $P(\cdot)$ *удовлетворяет условиям Каратеодори (см. предположения a), b), c) леммы 3). Тогда если для почти всех* $t\in[0,T]$ *многозначное отображение* $P(t,\cdot)$ *является* β*-липшицевым, то* $\mathcal{I}_P(\cdot)$ *является* βT*-липшицевым.*

5. Доказательство основного результата

Определим отображения $F_0:\mathbb{R}^n\times L_\infty^n\times L_\infty^n\rightrightarrows L_\infty^k$, $F_1:\mathbb{R}^n\times L_\infty^n\rightrightarrows L_\infty^k$, $F_2:\mathbb{R}^n\times L_\infty^n\rightrightarrows\mathbb{R}^m$ соотношениями

$$F_0(x_0,u,v):=\left\{y(\cdot)\in L_\infty^k:\ y(t)\in F\left(t,x_0+\int_0^t u(s)\,ds,v(t)\right)\quad \dot{\forall}\, t\in[0,T]\right\},$$

$$F_1(x_0,v):=F_0(x_0,v,v),$$

$$F_2(x_0,v):=G\left(x_0,x_0+\int_0^T v(s)\,ds\right)$$

для любых $(x_0, u, v) \in \mathbb{R}^n \times L_\infty^n \times L_\infty^n$.

Покажем, что отображения F_1 и F_2 удовлетворяют предположениям леммы 2. Из леммы 3 следует, что отображение F_0 замкнуто и определено корректно (т. е. множество $F_0(x_0, u, v)$ замкнуто и непусто для любых $(x_0, u, v) \in \mathbb{R}^n \times L_\infty^n \times L_\infty^n$). Из лемм 1, 3 и 4, накрываемости отображения F по третьему аргументу и липшицевости по второму следует, что для любого $\delta > 0$ отображение F_1 является накрывающим с константой $\alpha_F - \beta T - \delta$. Из леммы 1 следует, что отображение F_2 является α_G-накрывающим по переменной x_0. Кроме того, F_2 липшицево по переменной v с константой Липшица, равной $T\beta_G$. Замкнутость отображений F_1 и F_2 вытекает из лемм 3 и 4, соответственно. Липшицевость с константой β_F отображения F_1 по первой переменной очевидна. Из (2) следует, что

$$\alpha_F\alpha_G - \beta_G\alpha_F - T\beta_F\alpha_G > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_F\alpha_G - \beta_G\alpha_F - T\beta_F\alpha_G + T\beta_G\beta_F > T\beta_F\alpha_G + T\beta_G\beta_F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha_G - \beta_G)(\alpha_F - T\beta_F - \delta) > T\beta_G\beta_F$$

для достаточно малого $\delta > 0$.

Итак, отображения F_1 и F_2 удовлетворяют всем предположениям леммы 2 при $y_1 = 0 \in \in L_\infty^k$, $y_2 = 0 \in \mathbb{R}^m$. Значит, система 3 имеет решение, и следовательно, задача (1) имеет решение. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т 49. № 4. С. 439–455.

2. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // ДАН. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.

3. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Appl. 2009. V. 5. № 1. P. 105–127.

4. *Арутюнов А.В.* Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Математические заметки. 2009. Т. 86. № 2. С. 163–169.

5. *Арутюнов А.В., Гельман Б.Д.* О структуре множества точек совпадения // Математический сборник. 2015. Т. 206. № 3. С. 35–56.

6. *Арутюнов А.В., Аваков Е.Р., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.

7. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.

8. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Anal. 2012. V. 75. № 3. P. 1026–1044.

9. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E.* Existence of local solutions in constrained dynamic systems // Applicable Analysis. 2011. V. 90. Iss. 6. P. 889–898.

10. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1561–1570.

11. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* К вопросу о разрешимости управляемых дифференциальных систем // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 1. С. 49–54.

12. *Arutyunov A., de Oliveira V.A., Pereira F.L., Zhukovskiy E., Zhukovskiy S.* On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2015. V. 94. Iss. 1. P. 129–143.

13. *Жуковский С.Е., Жуковская З.Т.* Достаточные условия локальной разрешимости управляемой системы // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2014. Т. 19. Вып. 6. С. 1761–1769.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-50044), гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ, № НШ-8215.2016.1 и гранта Президента Российской Федерации № МК-5333.2015.1.

Поступила в редакцию 10 октября 2016 г.

Жуковский Сергей Евгеньевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Жуковская Зухра Тагировна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: zyxra2@yandex.ru

UDC 517.922
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1983-1989

SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR IMPLICIT DIFFERENTIAL INCLUSIONS

© **S. E. Zhukovskiy, Z. T. Zhukovskaya**

Peoples Friendship University of Russia
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

A boundary value problem for an implicit differential inclusion is considered Sufficient conditions for solvability of this problem are obtained.
Key words: implicit differential inclusion; boundary value problem; covering mapping

REFERENCES

1. *Zhukovskiy E.C., Pluzhnikova E.A.* Nakryvayushchie otobrazheniya v proizvedenii metricheskih prostranstv i kraevye zadachi dlya differencial'nyh uravnenij, ne razreshennyh otnositel'no proizvodnoj // Differencial'nye uravneniya. 2013. T. 49. № 4. S. 439–455.

2. *Arutyunov A.V.* Nakryvayushchie otobrazheniya v metricheskih prostranstvah i nepodvizhnye tochki // DAN. 2007. T. 416. № 2. S. 151–155.

3. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Appl. 2009. V. 5, № 1. P. 105–127.

4. *Arutyunov A.V.* Ustojchivost' tochek sovpadeniya i svojstva nakryvayushchih otobrazhenij // Matematicheskie zametki. 2009. T. 86. № 2. S. 163–169.

5. *Arutyunov A.V., Gel'man B.D.* O strukture mnozhestva tochek sovpadeniya // Matematicheskiy sbornik. 2015. T. 206. № 3. S. 35–56.

6. *Arutyunov A.V., Avakov E.R., Zhukovskiy E.S.* Nakryvayushchie otobrazheniya i ih prilozheniya k differencial'nym uravneniyam, ne razreshennym otnositel'no proizvodnoj // Differencial'nie uravneniya. 2009. T. 45. № 5. S. 613–634.

7. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* O korrektnosti differencial'nyh uravnenij, ne razreshennyh otnositel'no proizvodnoj // Differencial'nie uravneniya. 2011. T. 47. № 11. S. 1523–1537.

8. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Anal. 2012. V. 75. № 3. P. 1026–1044.

9. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E.* Existence of local solutions in constrained dynamic systems // Applicable Analysis. 2011. V. 90. Iss. 6. P. 889–898.

10. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E.* Lokal'naya razreshimost' upravlyaemyh sistem so smeshannymi ogranicheniyami // Differencial'nie uravneniya. 2010. T. 46. № 11. S. 1561–1570.

11. *Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A.* K voprosu o razreshimosti upravlyaemyh differencial'nyh sistem // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences, 2013. T. 18. Vyp. 1. S. 49–54.

12. *Arutyunov A., de Oliveira V.A., Pereira F.L., Zhukovskiy E., Zhukovskiy S.* On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2015. V. 94. Iss. 1. P. 129–143.

13. *Zhukovskiy S.E., ZHukovskaya Z.T.* Dostatochnye usloviya lokal'noj razreshimosti upravlyaemoj sistemy // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences, 2014. T. 19. № 6. S. 1761–1769.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 16-31-50044), the grant of the Russian Federation President for the state support of leading scientific schools № NSh-8215.2016.1 and by the grant of the President of Russian Federation № MK-5333.2015.1.

Received 10 October 2016

Zhukovskiy Sergey Evgen'evich, Peoples Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Zhukovskaya Zukhra Tagirovna, Peoples Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Lecturer of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: zyxra2@yandex.ru

Информация для цитирования:

Жуковский С.Е., Жуковская З.Т. Разрешимость краевых задач для неявных дифференциальных включений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 1983-1989. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1983-1989

Zhukovskiy S.E., Zhukovskaya Z.T. Razreshimost' kraevyh zadach dlya neyavnyh differentsial'nyh vklyuchenij [Solvability of boundary value problems for implicit differential inclusions]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 1983-1989. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1983-1989 (In Russian)