Kuterin Fedor Alekseevich, Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevskiy, Nizhny Novgorod, the Russian Federation, Assistant, e-mail: kuterin.f@yandex.ru

УДК 517.929.7

О ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ ГРИНА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

© **С.М. Лабовский**

Ключевые слова: функция Грина; функционально-дифференциальное уравнение.
Рассматривается двухточечная краевая задача для функционально-дифференциального уравнения. Получено необходимое и достаточное условие отрицательности функции Грина в терминах собственных чисел двух вспомогательных краевых задач.

Задача

Результат данной работы обобщает результаты, полученные в [1] в случае $n = 3$. Рассматривается задача об условиях отрицательности функции Грина двухточечной краевой задачи

$$\mathcal{L}u(x) := u^{(n)}(x) - \int_0^l u(s)d_s r(x,s) = f(x),\ x \in [0,l], (n \geqslant 3) \tag{1}$$

$$B(u) := (u(0), u'(0), \ldots, u^{(n-2)}(0), u(l)) = 0, \tag{2}$$

(символ $:=$ означает *равно по определению*) в предположениях, приведенных ниже. Отметим, в частности, предположение неубывания функции $r(x,s)$ по второму аргументу, что для случая сосредоточенных отклонений

$$\int_0^l u(s)d_s r(x,s) = \sum_{i=1}^m p_i(x)u(h_i(x)), \tag{3}$$

означает неотрицательность коэффициентов $p_i \geqslant 0$.

Аналог задачи в случае $n = 2$ рассматривался в [2], а также в случае запаздывания в [3–5].

Основной результат – необходимые и достаточные условия отрицательности в терминах наименьших собственных чисел для вспомогательных краевых задач. Эти числа могут быть эффективно оценены, и получены эффективные условия отрицательности. Для уравнения с запаздывающим аргументом задача рассматривалась в [6].

Помимо основной задачи, которую можно записать в виде

$$\mathcal{L}u = f,\ B(u) = 0$$

будем рассматривать и неоднородную задачу

$$\mathcal{L}u = f,\ B(u) = \alpha. \tag{4}$$

В случае однозначной разрешимости (4) решение имеет вид

$$u = Gf + U\alpha.$$

При этом G имеет интегральное представление $Gf(x) = \int_0^l G(x,s)f(s)ds$, а отрицательность $G(x,s) \leqslant 0$ функции Грина эквивалентна импликации $f \geqslant 0 \to Gf \leqslant 0$. Аналогичное свойство может иметь отображение U. Это свойство назовем *положительной разрешимостью*, что означает положительность оператора-пары (G,U). Однако для задачи с вектор-функционалом $B(u)$ краевых условий, определенным равенством (2), это свойство не имеет места, и мы будем понимать положительную разрешимость в *более узком смысле*, согласно следующему определению.

О п р е д е л е н и е 1. Задача (4) *частично положительно разрешима*, если она однозначно разрешима при любых допустимых правых частях, и из

$$f \leqslant 0, \ \alpha = (\overbrace{0,\ldots,0}^{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \geqslant 0$$

следует неотрицательность $u \geqslant 0$ ее решения (т.е. $u^{(n-2)}(0) \geqslant 0$, $u(l) \geqslant 0$, $u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-3)}(0) = 0$).

Предположения

Примем, что $r(x,s)$ не убывает по s для почти всех $x \in [0,l]$, $r(x,0) = 0$, $r(x,s)$ измерима по $x \in [0,l]$ для всех $s \in [0,l]$, и $r(x,l)$ интегрируема на $[0,l]$. Функция $f(x)$ интегрируема на $[0,l]$. Решение $u(x)$ есть функция с абсолютно непрерывной производной $u^{(n-1)}$, удовлетворяющая (1) почти всюду на $[0,l]$.

В случае (3) $p_i(x)$ интегрируема по Лебегу на $[0,l]$, а функции $h_i(x)$ измеримы (если $h(x) \notin [0,l]$, $u(h(x)) = 0$). Условие неубывания $r(x,s)$ означает неотрицательность коэффициентов $p_i(x) \geqslant 0$.

Результат

Уравнение

$$\mathcal{L}_\lambda u := u^{(n)}(x) - \lambda \int_0^l u(s) d_s r(x,s) = 0$$

будет задачей о собственных значениях при краевых условиях

$$B_0(u) := (u(0), u'(0), \ldots, u^{(n-1)}(0)) = 0$$

и

$$B_l(u) := (u(0), u'(0), \ldots, u^{(n-3)}(0), u(l), -u'(l)) = 0.$$

Пусть $\lambda^{(0)}$ и $\lambda^{(l)}$ наименьшие положительные собственные значения задач $\{\mathcal{L}_\lambda u = 0,\ B_0(u) = 0\}$ и $\{\mathcal{L}_\lambda u = 0,\ B_0(u) = 0\}$ соответственно[3]. Если одно (или оба) из них не существует, оно принимается равным плюс бесконечности.

Собственные числа $\lambda^{(0)}$ и $\lambda^{(l)}$ могут быть эффективно и точно оценены с помощью теорем об интегральных и дифференциальных неравенствах (см., например, [7, 8]. Двухточечная задача рассмотрена в сингулярном случае в [9].

[3]Каждая из этих задач эквивалентна задаче о собственных значениях для компактного положительного оператора. В [10] показано, что наименьшее собственное число просто, положительно и $1/\lambda = \rho$, где ρ – спектральный радиус оператора.

Основной результат представлен в следующей теореме.

Т е о р е м а 1. *Условие*

$$(\lambda^{(0)} > 1) \wedge (\lambda^{(l)} > 1)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы задача (4) *была частично положительно разрешима, причем если* $-\int_0^l f(x)\,dx + \alpha_{n-1} + \alpha_n > 0$, *то* $u(x) \geqslant cx^{n-1}(l-x)$ *для некоторого* $c > 0$.

Эффективные условия положительной разрешимости могут быть получены с помощью теорем об оценке спектрального радиуса положительного оператора. Такие теоремы известны, см., например, [7]. В нашем случае удобно использовать их варианты из [8, 9].

Т е о р е м а 2. *Пусть существует неотрицательное решение неравенств* $\mathcal{L}u = \psi \geqslant 0$, $B_0(u) \geqslant\not\equiv 0$.

Тогда $\lambda^{(0)} > 1$.

Т е о р е м а 3. *Пусть существует неотрицательное решение неравенств* $\mathcal{L}u = \psi \geqslant 0$, $B_l(u) \geqslant 0$, *причем либо* $\int_0^l \psi(s)ds > 0$, *либо* $B_l(u) \neq 0$.

Тогда $\lambda^{(l)}) > 1$.

С л е д с т в и е 1. *Пусть*

$$\operatorname{ess\,sup} r(x,l) < \frac{n!}{l^n}.$$

Тогда $\lambda^{(0)} > 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\operatorname{ess\,sup} r(x,l) = \dfrac{n!}{l^n(1+\varepsilon)}$. Полагая в теореме 2 $u(x) = x^n + \varepsilon x^{n-1} l$, имеем:

$$n! - \int_0^l (s^n + \varepsilon s^{n-1} l) d_s r(x,s) \geqslant n! - l^n(1+\varepsilon)\frac{n!}{l^n(1+\varepsilon)} = 0.$$

Для получения оценки $\lambda^{(l)}$ используем теорему 3.

С л е д с т в и е 2. *Пусть*

$$\operatorname{ess\,sup} r(x,l) \leqslant \frac{n! n^n}{4(n-2)^{n-2} l^n}.$$

Тогда $\lambda^{(l)} > 1$, *исключая случай* $\displaystyle\int_0^l u(s) d_s r(x,s) \equiv \frac{n! n^n}{4(n-2)^{n-2} l^n} u(x_0)$, *где* $x_0 = (n-2)l/n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим в теореме 3 $u(x) = x^{n-2}(l-x)^2$. Так как

$$\max\{x^{n-2}(l-x)^2 \colon 0 \leqslant x \leqslant l\} = \frac{4(n-2)^{n-2}}{n^n}\, l^n,$$

$$\mathcal{L}u = n! - \int_0^l s^{n-2}(l-s)^2 d_s r(x,s) \geqslant n! - \frac{4(n-2)^{n-2}}{n^n}\, l^n r(x,l) \geqslant 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Labovskiy S., Volinsky I.* On positivity of Green functions for a functional-differential equation // Functional Differential Equations. 2014. №21 (1–2). P. 17–30.

2. *Labovskiy S.* On positivity of the Green operator for functional differential equation // Functional Differential Equations. 2012. №19 (3-4). P. 323–333.

3. *Лабовский С.М.* О дифференциальных неравенствах для уравнения с запаздывающим аргументом // Труды Московского института химического машиностроения. 1975. № 64. С. 40–45.

4. *Лабовский С.М.* О сохранении знака вронскиана фундаментальной системы, функции Коши и функции Грина двухточечной краевой задачи для уравнения с запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения. 1975. №11(10). С. 1780–1789.

5. *Симонов П.М., Чистяков А.В.* О некоторых признаках сохранения знака функции Грина для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом // Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики. М.: Московский физико-технический институт (государственный университет), 1999.
6. *Лабовский С.М.* О линейных дифференциальных неравенствах. PhD thesis, Математический институт им. Размадзе. Тбилиси, 1975.
7. *Krasnosel'skii M., Lifshits E., Sobolev A.* Positive linear systems. The method of positive operators. Transl. from the Russian by Jürgen Appell. Berlin: Heldermann-Verlag, 1989. Zbl 0674.47036.
8. *Лабовский С.М.* О положительных решениях линейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1984. №20(4). С. 578–584.
9. *Лабовский С.М.* Положительные решения двухточечной краевой задачи для сингулярного линейного функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1988. №24(10). С. 1116–1123.
10. *Крейн М.Г., Рутман М.А.* Вполне непрерывные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи математических наук. 1948. №1(23). С. 3–95.

Поступила в редакцию 9 июня 2015 г.

Labovskiy S.M. ON POSITIVENESS OF GREEN FUNCTIONS OF A FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

We consider the two-point boundary value problem for a functional-differential equation. A necessary and sufficient condition for the negativity of the Green function in terms of the eigenvalues of two auxiliary problems is obtained.

Key words: Green function; functional differential equation.

Лабовский Сергей Михайлович, Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: labovski@gmail.com

Labovskiy Sergei Mikhailovich, Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: labovski@gmail.com

УДК 519.6

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ПОТЕНЦИАЛА В НЕЧЕТНО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

© Е.Б. Ланеев, М.Н. Муратов, Е.Ю. Пономаренко

Ключевые слова: некорректно поставленная задача; обратная задача потенциала; метод регуляризации Тихонова.

Получено устойчивое решение линейной обратной задачи потенциала для для бесконечно тонких плоских тел в случае, когда поле потенциала задано на неплоской поверхности.

Как известно, обратная задача потенциала [1] некорректно поставлена. Ее решение может не существовать, существующее решение может быть не единственным и неустойчивым в естественных постановках. В данной работе рассматривается постановка линейной обратной задачи потенциала для бесконечно тонких плоских тел, сводящаяся к линейной задаче продолжения поля потенциала [2]. Устойчивое решение строится с использованием метода регуляризации Тихонова [3]. Задача рассматривается в рамках периодической модели