

ОСОБЕННОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ И ЛИНИЙ В ПСЕВДОФИНСЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. III

© А. Н. Курбацкий¹⁾, Н. Г. Павлова²⁾, А. О. Ремизов³⁾

¹⁾ МГУ им. М. В. Ломоносова, Московская школа экономики
119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские Горы, д. 1, корп. 61
E-mail: akurbatskiy@gmail.com

²⁾ Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: natasharussia@mail.ru

³⁾ Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65
E-mail: alexey-remizov@yandex.ru

Эта статья является третьей в серии работ, посвященных особенностям геодезических потоков в обобщенных финслеровых (псевдофинслеровых) пространствах. В двух предыдущих статьях мы определили геодезические как экстремали вспомогательного функционала, все неизотропные экстремали которого совпадают с экстремалими функционала действия, и исследовали типичные особенности геодезических потоков в случае, когда размерность многообразия равна двум, а псевдофинслерова метрика задана формой степени три общего положения. В настоящей статье мы рассматриваем важный случай не общего положения: особенности геодезических потоков на двумерных поверхностях, вложенных в пространство (произвольной размерности) с метрикой Бервальда–Моора.

Ключевые слова: псевдофинслеровы пространства; метрика Бервальда–Моора; геодезические; особые точки; резонансы; нормальные формы

1. Введение и предварительные сведения

Для удобства читателя мы кратко излагаем некоторые результаты предшествующих статей [1, 2], необходимые для понимания настоящей работы.

1.1. Общий случай. *Финслеровым пространством*, следуя [3], мы называем пару (M, \bar{F}) или, эквивалентно, (M, \bar{f}) , где M – гладкое (здесь и далее это означает C^∞ , если не оговорено противное) многообразие, $\dim M = m$, с координатами (x_i) , снабженное функцией $\bar{F}(x_i; \dot{x}_i): TM \rightarrow \mathbb{R}$, положительно однородной степени $n \geq 2$ по переменным (\dot{x}_i) , гладкой на дополнении нулевого сечения касательного расслоения TM , и удовлетворяющей условиям:

В. $\bar{F}(x_i; \dot{x}_i) > 0$, если $|\dot{x}_1| + \dots + |\dot{x}_m| \neq 0$.

С. Гессиян функции \bar{f}^2 по переменным (\dot{x}_i) положительно определен, т. е.

$$\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 (\bar{f}^2)}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \xi_i \xi_j > 0, \quad \text{если} \quad \sum_{i=1}^m |\xi_i| \neq 0. \quad (1)$$

Функция $\bar{f}(x_i; \dot{x}_i) = \bar{F}^{\frac{1}{n}}(x_i; \dot{x}_i)$ гладкая на всем дополнении нулевого сечения касательного расслоения TM и положительно однородная степени 1 по (\dot{x}_i) . Квадратичная форма (1) называется *фундаментальным тензором*, а \bar{f} – *метрической функцией* на M .

Метрическая функция $\bar{f}(x_i; \cdot)$ определяет норму на каждом касательном пространстве $T_x M$. Это позволяет определить функционалы действия и длины, аналогично тому, как это делается для римановых метрик. Именно, для кривой $\gamma: I \rightarrow M$ мы имеем:

$$J^{(\nu)}(\gamma) = \int_I \bar{f}^\nu(x_i; \dot{x}_i) dt = \int_I \bar{F}^{\frac{\nu}{n}}(x_i; \dot{x}_i) dt, \quad \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt},$$

где $\nu = 1$ (длина) или $\nu = 2$ (действие), см., например, [3, 4, 5, 6]. Как и в римановом случае, функционал длины $J^{(1)}$ инвариантен относительно перепараметризации кривой γ , а функционал действия $J^{(2)}$ – не инвариантен.

Параметризованные геодезические могут быть определены как экстремали функционала действия $J^{(2)}$, соответствующая параметризация называется *натуральной* или *канонической* (она пропорциональна длине дуги кривой, где $ds = \bar{f}$).

Непараметризованные геодезические могут быть определены как экстремали любого из двух функционалов $J^{(2)}$ и $J^{(1)}$. Различие в использовании $J^{(2)}$ и $J^{(1)}$ состоит в следующем. В первом случае мы просто забываем натуральную параметризацию экстремалей функционала $J^{(2)}$, а во втором случае система уравнений Эйлера–Лагранжа с лагранжианом $\bar{f}(x_i; \dot{x}_i)$ содержит не m , а всего лишь $m - 1$ независимых уравнений, см. [3]. Это обстоятельство отражает тот факт, что функционал длины $J^{(1)}(\gamma)$ инвариантен относительно перепараметризации γ . Используя имеющуюся степень свободы и рассматривая только непрерывно дифференцируемые геодезические, имеющие в каждой точке определенное касательное направление, можно положить параметр t равным одной из координат x_i , уменьшив число уравнений в системе Эйлера–Лагранжа для $J^{(1)}(\gamma)$ на единицу.

Непараметризованные геодезические в финслеровых пространствах можно определить как экстремали функционала $J^{(\nu)}$ с произвольным $\nu \geq 1$, в частности, $\nu = n$ (см. [1]). Такое изменение определения геодезических не дает ничего нового, но для псевдофинслеровых пространств оно оказывается весьма полезно.

Псевдофинслеровым пространством (или *обобщенным финслеровым пространством*), следуя [3], мы называем пару (M, \bar{F}) или, эквивалентно, (M, \bar{f}) , где многообразие M и функции \bar{F} , \bar{f} удовлетворяют всем условиям из определения финслерова пространства, кроме В и С. Отсутствие условия В приводит к появлению *изотропной гиперповерхности* \mathcal{F} , задаваемой в касательном расслоении TM уравнением $\bar{F}(x_i; \dot{x}_i) = 0$. Хорошо известным примером псевдофинслерова пространства является так называемое *пространство Бервальда–Моора*, в котором $\bar{f}(x_i; \dot{x}_i) = (\dot{x}_1 \cdots \dot{x}_n)^{\frac{1}{n}}$, $n = m$.

Начиная с этого момента, мы будем рассматривать псевдофинслеровы пространства и под (непараметризованными) геодезическими в таких пространствах подразумевать проекции на M экстремалей функционала $J^{(n)}$, т. е. решений системы уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \ddot{x}_j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \dot{x}_i \partial x_j} \dot{x}_j = \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

отличные от точки.

Так как мы исследуем непараметризованные геодезические, удобно перейти от TM к проеکتивизированному касательному расслоению PTM с помощью стандартной проеکتивизации $\Pi: TM \rightarrow PTM$, при которой проеکتивизируется касательное пространство в каждой точке многообразия M . Например, положив $x = x_1$, $y_i = x_i$ и $p_i = dy_i/dx$ для $i = 2, \dots, m$, и перейдя от лагранжиана $\bar{F}(x_i; \dot{x}_i)$ лагранжиану $F(x, y_i, p_i) = \bar{F}/\dot{x}_1^n$. При этом система уравнений (2) перейдет в некоторую систему, состоящую из $m - 1$ уравнений второго порядка. Заметим, что изотропная гиперповерхность \mathcal{F} , задаваемая в пространствах TM и PTM уравнениями

$\bar{F}=0$ и $F=0$, соответственно, является инвариантной гиперповерхностью обеих систем. Кроме того, в случае $m=2$ все изотропные линии являются непараметризованными экстремалами функционала $J^{(n)}$.

1.2. Двумерный случай. Выпишем систему уравнений в PTM явно в двумерном случае ($m=2$), предположив также, что функция \bar{F} является однородным полиномом степени $n \geq 2$ по переменным (\dot{x}_i) . Обозначим координаты на многообразии M через (x, y) , т. е. положим

$$\bar{F}(x, y; \dot{x}, \dot{y}) = \sum_{i=0}^n a_i(x, y) \dot{x}^{n-i} \dot{y}^i, \quad F(x, y; p) = \sum_{i=0}^n a_i(x, y) p^i,$$

где коэффициенты a_i гладко зависят от (x, y) . Система (2) в этом случае принимает вид

$$\ddot{x} = \frac{\bar{H}_1}{\bar{H}}, \quad \ddot{y} = \frac{\bar{H}_2}{\bar{H}}, \quad \bar{H} = \begin{vmatrix} \bar{F}_{\dot{x}\dot{x}} & \bar{F}_{\dot{x}\dot{y}} \\ \bar{F}_{\dot{x}\dot{y}} & \bar{F}_{\dot{y}\dot{y}} \end{vmatrix}, \quad \bar{H}_1 = \begin{vmatrix} \bar{G}_1 & \bar{F}_{\dot{x}\dot{y}} \\ \bar{G}_2 & \bar{F}_{\dot{y}\dot{y}} \end{vmatrix}, \quad \bar{H}_2 = \begin{vmatrix} \bar{F}_{\dot{x}\dot{x}} & \bar{G}_1 \\ \bar{F}_{\dot{x}\dot{y}} & \bar{G}_2 \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где $\bar{G}_1 = \bar{F}_x - \dot{x}\bar{F}_{\dot{x}x} - \dot{y}\bar{F}_{\dot{x}y}$ и $\bar{G}_2 = \bar{F}_y - \dot{x}\bar{F}_{\dot{x}y} - \dot{y}\bar{F}_{\dot{y}y}$.

Стандартная проективизация $\Pi: TM \rightarrow PTM$ переводит систему (3) в

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{H_2 - pH_1}{H} = \frac{P}{\Delta}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(x, y; p) &= nF F_{pp} - (n-1)F_p^2, \\ P(x, y; p) &= nF(F_y - F_{xp} - pF_{yp}) + (n-1)F_p(F_x + pF_y). \end{aligned} \quad (5)$$

Δ и P являются полиномами по p степеней не больше $2n-4$ и $2n-1$, соответственно. В частности, $\Delta(x, y; p) = (2na_n a_{n-2} - (n-1)a_{n-1}^2)p^{2n-4} + \dots + 2na_0 a_2 - (n-1)a_1^2$.

Систему уравнений (4) удобно записать как векторное поле

$$\Delta \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} \right) + P \frac{\partial}{\partial p} \quad (6)$$

на PTM . В соответствии с принятым определением, непараметризованные геодезические суть проекции интегральных кривых поля (6) из PTM на M , отличные от точки. Поле контактных плоскостей $dy = p dx$ высекает на инвариантной изотропной поверхности $\mathcal{F} \subset PTM$ поле направлений, интегральные кривые которого соответствуют (по проектировании $PTM \rightarrow M$) изотропным геодезическим. Все остальные интегральные кривые поля (6), не лежащие целиком на изотропной поверхности \mathcal{F} , соответствуют неизотропным геодезическим.

Особенности геодезического потока возникают в тех точках пространства PTM , где функция $\Delta(x, y; p)$ обращается в нуль. В области $M' \subset M$, через каждую точку которой проходят m изотропных линий псевдофинслера пространства, т. е. многочлен $F(p)$ имеет m вещественных корней (с учетом кратностей и, возможно, включая в число корней $p = \infty$), описание множества особых точек геодезического потока (уравнения (4)) весьма просто. Именно, в точке $(x, y) \in M'$ функция $\Delta(x, y; p)$ обращается в нуль если и только если хотя бы две из m изотропных линий, проходящих через данную точку, касаются друг друга, причем p – соответствующее касательное направление. Это утверждение не верно для дополнения области M' , где многочлен $F(p)$ имеет комплексные корни, и в области $M \setminus M'$ множество особых точек устроено иначе.

Для случая $n=3$, $m=2$ типичные особенности геодезического потока в M' и $M \setminus M'$ детально исследованы в предшествующей работе [2] в предположении, что $F(x, y; p)$ – кубический многочлен по p *общего положения*. В этом случае многообразие M состоит из двух открытых областей M_+ и M_- и разделяющей их кривой M_0 , таких, что F имеет в во всех

точках области M_+ (M_-) три (соответственно, один) простых вещественных корня, а на кривой M_0 имеется кратный корень. Доказано, что в области M_+ особенностей нет. В области M_- , за исключением двух исключительных кривых $S_{1,2}$, каждой точке $q \in M_-$ отвечают два особых касательных направления, для которых Δ обращается в нуль. Геодезические, проходящие через такую точку $q \in M_-$ с этими касательными направлениями, являются полукубическими параболой с каспом в q . Особенности, связанные с кривыми $S_{1,2}$, выглядят сложнее. Мы не будем углубляться в дальнейшее описание особенностей в области M_- (интересующегося читателя отсылаем к работе [2]), так как в пространствах, рассматриваемых в настоящей статье, этой области нет ($M_- = \emptyset$).

Более подробно скажем об особенностях, возникающих на кривой M_0 , потому что их интересно сравнить с особенностями геодезически потоков на двумерных поверхностях, вложенных в пространство Бервальда–Моора. Прежде всего, исключим из рассмотрения те точки кривой M_0 , в которых она не регулярна (в типичном случае – имеет касп), и обозначим оставшееся множество через $M_{0,1}$. В каждой точке $q \in M_{0,1}$ многочлен F имеет двойной корень $p_0 = -b/a$, который является также двойным корнем многочлена Δ в q . Таким образом, $(q; p_0)$, $q \in M_{0,1}$, суть особые точки сразу двух неявных дифференциальных уравнений $F = 0$ и $\Delta = 0$. Из формулы (5) следует, что $P(q; p_0) = 0$, поэтому точки $(q; p_0)$, $q \in M_{0,1}$, являются особыми также и для поля (6): все компоненты векторного поля обращаются в нуль, и никакое направление в этих точках не определено.

Далее мы ограничимся рассмотрением типичных особых точек $q \in M_{0,1}$, в окрестности которых $M_{0,1}$ – регулярная кривая и изотропное направление p_0 трансверсально $M_{0,1}$. В таких точках оба неявные дифференциальные уравнения $F = 0$ и $\Delta = 0$ имеют *нормальную форму Чибрарио* $p^2 = x$ (см. [7]), и их интегральные кривые суть полукубические параболы, лежащие по разные стороны от $M_{0,1}$ (в областях M_+ и M_- , соответственно). В случае общего положения точки $q \in M_{0,1}$, не удовлетворяющие описанным условиям, лежат на страте $M_{0,1}$ дискретно.

Т е о р е м а 1 ([2]). *Предположим, что изотропное направление p_0 трансверсально кривой $M_{0,1}$ в точке $q \in M_{0,1}$. Тогда росток поля (6) в особой точке $(q; p_0)$ гладко орбитально эквивалентен*

$$3\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta} + 0 \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

и направлению p_0 соответствует однопараметрическое семейство геодезических, выходящих из точки q в области M_+ и M_- . Существуют такие локальные координаты с центром q , в которых это семейство геодезических имеет вид

$$x = \alpha|\eta|^{\frac{3}{2}} + \eta^2 + \alpha\bar{X}_\alpha(\eta), \quad y = \alpha\eta|\eta|^{\frac{3}{2}} + \varepsilon\eta^3 + \alpha\bar{Y}_\alpha(\eta), \quad \varepsilon \neq 0, \quad (7)$$

где $\bar{X}_\alpha(\eta) = o(|\eta|^{\frac{3}{2}})$ и $\bar{Y}_\alpha(\eta) = o(|\eta|^{\frac{5}{2}})$ – C^2 -гладкие функции.

Здесь $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) соответствует неизотропным геодезическим, выходящим из q в область M_+ (соответственно, M_-), а значение $\alpha = 0$ отвечает изотропной геодезической, являющейся полукубической параболой, лежащей в M_+ . Предельный случай $\alpha \rightarrow \infty$ дает единственную регулярную геодезическую, проходящую через точку q с касательным направлением p_0 . В окрестности точки q любая неизотропная геодезическая, выходящая из q в M_+ , содержится в криволинейном секторе, ограниченном двумя ветвями изотропной полукубической параболы, как это представлено на рис. 1 (слева).

Теорема 1 показывает, что продолжение геодезических через кривую $M_{0,1}$ не определено однозначно: все геодезические семейства (7) имеют одно и тоже касательное направление в точке $q \in M_{0,1}$ и почти все из них имеют в q особенность одного и того же типа. Таким образом, кривая, заданная формулой (7) с произвольным $\alpha \neq 0$, не имеет преимуществ перед кривой, состоящей из двух дуг вида (7) с α_1 при $(x, y) \in M_+$ и α_2 при $(x, y) \in M_-$.

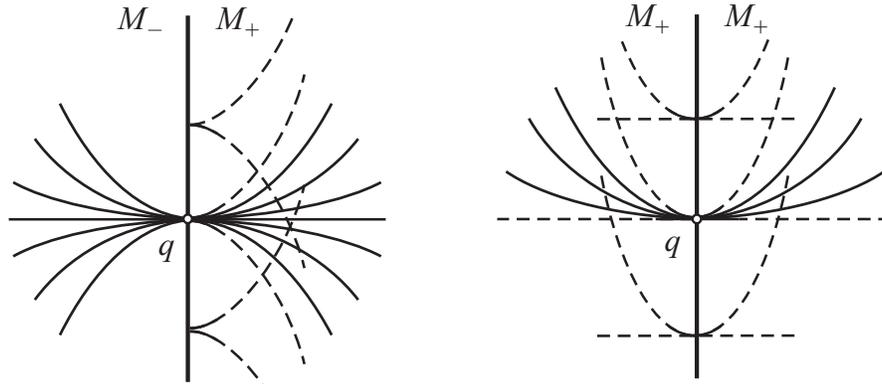


Рис. 1: Иллюстрация к теореме 1 (слева) и теореме 2 (справа). Страт $M_{0,1}$ изображен жирной линией (ось y). Сплошные и пунктирные линии изображают неизотропные и изотропные геодезические, соответственно.

2. Поверхности в пространстве Бервальда–Моора

Рассмотрим пространство \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, с координатами (x_1, \dots, x_n) , снабженное метрикой Бервальда–Моора $ds = (dx_1 \cdots dx_n)^{\frac{1}{n}}$, и гладкую двумерную поверхность $M \subset \mathbb{R}^n$, заданную в параметрическом виде $x_i = f_i(x, y)$, $i = 1, \dots, n$. Метрика Бервальда–Моора объемлющего пространства задает двумерное псевдофинслерово пространство (M, \bar{F}) с метрической функцией $\bar{f} = \bar{F}^{\frac{1}{n}}$, где

$$\bar{F}(x, y; \dot{x}, \dot{y}) = \prod_{i=1}^n (f_{ix}(x, y)\dot{x} + f_{iy}(x, y)\dot{y}), \quad f_{ix} = \frac{\partial f_i}{\partial x}, \quad f_{iy} = \frac{\partial f_i}{\partial y}, \quad (8)$$

и n семействами изотропных линий

$$f_i(x, y) = \text{const}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Для заданной точки $q \in M$, изотропное направление p назовем *простым* (*двойным* или *кратным*), если существует *ровно одна* (соответственно, *ровно две* или *не менее двух*) изотропных линий семейств (9), проходящих через точку q с касательным направлением p . По лемме 4 [1], особенности геодезического потока возникают в тех точках $q \in M$, где имеется по крайней мере одно кратное изотропное направление.

З а м е ч а н и е 1. В случае $n = 3$ определенное выше псевдофинслерово пространство (M, \bar{F}) относится к кубическим псевдофинслеровым метрикам, исследованным в предшествующей работе [2]. Однако в отличие от ситуации, рассмотренной в [2], функция \bar{F} , заданная формулой (8), не является типичной (не относится к случаю общего положения). В частности, соответствующий этой функции кубический многочлен $F(x, y; p)$ по p в каждой точке $(x, y) \in M$ имеет n вещественных корней (рассматриваемых с учетом кратности и, возможно, учитывая корень $p = \infty$), поэтому область $M_- = \emptyset$, и $M = M_+ \cup M_0$. Таким образом, по лемме 4 [1], особенности геодезического потока псевдофинслерова пространства (M, \bar{F}) возникают в тех и только тех точках, где имеются кратные изотропные направления (по крайней мере две из трех изотропных линий (9) имеют касание). Страт $M_{0,1}$ состоит из тех точек, где две изотропные линии касаются друг друга (определяя тем самым *двойное* изотропное направление) и третья изотропная линия трансверсальна им (*простое* изотропное направление).

Начиная с этого момента, мы будем предполагать, что функции $f_i(x, y)$ имеют невырожденные дифференциалы и в каждой точке $q \in M$ имеются только простые или двойные изотропные направления (очевидно, что при этом число двойных изотропных направлений может

меняться от 0 до $\left[\frac{n}{2}\right]$). Более того, предположим, что касание изотропных линий с двойным изотропным направлением имеет первый порядок.

Рассмотрим семейство геодезических, проходящих через точку $q \in M_{0,1}$ с двойным изотропным направлением p_0 , удовлетворяющую всем перечисленным условиям. Без ограничения общности будет считать, что рассматриваемая точка $q=0$ (начало координат на плоскости (x, y)) и двойное изотропное направление p_0 соответствует паре изотропных линий $f_1(x, y)=0$ и $f_2(x, y)=0$, где $f_{2y}(0) \neq 0$. Сделав замену переменной $y \mapsto f_2(x, y)$, приведем метрическую функцию (8) к аналогичному виду с $f_2(x, y)=y$ и $f_{1x}(0)=0$, $f_{1y}(0) \neq 0$, $f_{1xx}(0) \neq 0$. При этом двойное изотропное направление p_0 становится $p=0$ и, более того, в окрестности начала координат $p=0$ – двойное изотропное направление во всех точках $q \in M_{0,1} = \{f_{1x}(x, y)=0\}$.

Из условия $f_{1xx}(0) \neq 0$ следует, что $M_{0,1}$ – гладкая кривая, трансверсальная оси x в начале координат. Сделав замену $x \mapsto f_{1x}(x, y)$, преобразуем кривую $M_{0,1}$ в ось $x=0$ и метрическую функцию (8) в метрическую функцию аналогичного вида с $f_{1x}=xa(x, y)$, $f_{1y}=b(x, y)$, $f_2(x, y)=y$, где a, b – гладкие функции, не обращающиеся в нуль в начале координат. В результате мы получаем:

$$F(x, y; p) = p(ax + bp)G, \quad G(x, y; p) = \prod_{i=3}^n (f_{ix} + f_{iy}p), \quad G(0, 0; 0) \neq 0, \quad (10)$$

где G – некоторый многочлен по переменной p степени $\leq n-2$. Подставляя выражения (10) в формулу (5), получаем

$$\begin{aligned} \Delta &= ((1-n)(ax)^2 + 2(2-n)abxp + 2(2-n)(bp)^2)G^2 + \Delta_0, \\ P &= ap((n-2)bp - ax + P_0)G^2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\Delta_0 \in \langle x^3, x^2p, xp^2, p^3 \rangle$ и $P_0 \in \langle x^2, xp, p^2 \rangle$ (обе идеала рассматриваются в кольце гладких функций переменных x, y, p). Формула (11) показывает, что все компоненты поля (6) обращаются в нуль на линии $\{x=p=0\}$ и спектр линейной части поля (6) в любой точке этой линии содержит три нулевых собственных значения.

Это обстоятельство не позволяет установить нормальную форму роста поля (6) так, как это было сделано в теореме 1 [2]. Для преодоления этого препятствия мы используем процедуру раздутия (blow up) по формуле

$$\mathcal{B}: (x, y, u) \mapsto (x, y, p), \quad p = xu, \quad u \in \mathbb{R}P^1 = \mathbb{R} \cup \infty.$$

Отображение \mathcal{B} взаимно однозначно во всем пространстве за исключением плоскости $\Pi = \{(x, y, u): x=0\}$, образом которого является линия $\mathcal{B}(\Pi) = \{(x, y, p): x=p=0\}$. Отображение \mathcal{B} является локальным диффеоморфизмом во всех точках пространства (x, y, u) за исключением плоскости Π , причем обратное отображение задается формулой

$$\mathcal{B}^{-1}(x, y, p) = \left(x, y, \frac{p}{x}\right).$$

Заметим, что не существует геодезической, совпадающей с исключительной линией $\mathcal{B}(\Pi)$. Действительно, простое вычисление показывает, что поле (6) соответствует гладкому полю в пространстве (x, y, u) (за исключением плоскости Π), что, после сокращения общего множителя xG^2 , дает

$$x(A + \dots) \left(\frac{\partial}{\partial x} + xu \frac{\partial}{\partial y} \right) + u(n-2)(2(bu)^2 + 3abu + a^2 + \dots) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (12)$$

где

$$A(x, y, u) = (1-n)a^2 + 2(2-n)(abu + (bu)^2),$$

здесь и ниже многоточие означает члены, принадлежащие идеалу $\langle x \rangle$.

З а м е ч а н и е 2. Существует $\varepsilon > 0$, такое что $A(x, y, u) \neq 0$ для всех u и всех $|x| + |y| < \varepsilon$. Действительно, рассмотрим функцию $A(x, y, u)$ как многочлен второй степени по u с дискриминантом

$$D = (2 - n)^2(ab)^2 - 2(1 - n)(2 - n)(ab)^2 = n(2 - n)(ab)^2,$$

строго отрицательным при всех x, y достаточно близких к нулю.

Разделив все компоненты поля (12) на $(A + \dots)$, получаем

$$x \left(\frac{\partial}{\partial x} + xu \frac{\partial}{\partial y} \right) + u(n - 2)(U + \dots) \frac{\partial}{\partial u}, \quad U(x, y, u) = \frac{2(bu)^2 + 3abu + a^2}{A(x, y, u)}. \quad (13)$$

З а м е ч а н и е 3. Плоскость $x = 0$ является инвариантной для обоих полей (12) и (13). Эта плоскость целиком заполнена *вертикальными* (т.е. параллельными оси u) прямыми интегральными линиями этих полей, проекции которых на плоскость (x, y) вдоль оси u являются точками на оси y .

Л е м м а 1. *Через любую точку $q \in M$, лежащую на оси y , геодезические с касательным направлением $p = 0$ могут проходить только со следующими допустимыми значениями переменной u :*

$$u_0 = 0, \quad u_1 = -a/2b, \quad u_2 = -a/b. \quad (14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно стандартной теореме существования и единственности для обыкновенного дифференциального уравнения, для каждой точки (x, y, u) , удовлетворяющей условиям $x = 0$ и $U(x, y, u) \neq 0$, существует единственная интегральная кривая поля (13), проходящая через эту точку. Но согласно замечанию 3, эта интегральная кривая является вертикальной прямой, проекция которой на плоскость (x, y) является точкой на оси y , а не геодезической. Следовательно, геодезические могут проходить через точку $q \in M$, лежащую на оси y , с касательным направлением $p = 0$ только при $u = 0$ или тех значениях u , при которых $2(bu)^2 + 3abu + a^2 = 0$ (см. формулу (13)). Это и дает три допустимых значения (14).

Л е м м а 2. *Множество особых точек поля (13) состоит из трех взаимно непересекающихся кривых*

$$W_i^c = \{(x, y, u) : x = 0, u = u_i(y)\}, \quad i = 0, 1, 2,$$

являющихся центральными многообразиями этого поля. На каждой кривой W_i^c линейная часть поля (13) имеет постоянный спектр $(1, \lambda, 0)$, где

$$\lambda = \frac{n-2}{n} \quad \text{при } i = 1, \quad \lambda = \frac{n-2}{1-n} \quad \text{при } i \in \{0, 2\}.$$

В обоих случаях вектор ∂_u является собственным вектором, соответствующим собственному значению λ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение леммы очевидно, второе проверяется простым вычислением.

Т е о р е м а 2. *Предположим, что в точке $q \in M$ функции $f_i(x, y)$ имеют невырожденные дифференциалы и p_0 является двойным изотропным направлением, таким что соответствующие изотропные линии имеют в q касание первого порядка. Тогда росток поля (13) в особой точке $(q; u_i)$ имеет орбитальные нормальные формы, указанные в таблице 1, и направлению p_0 соответствует однопараметрическое семейство геодезических, выходящих из точки q .*

Существуют локальные координаты с центром в точке q , в которых это семейство состоит из C^2 -гладких изотропных геодезических

$$y = x^2 + Y(x, \alpha|x|^\lambda), \quad Y(x, \alpha|x|^\lambda) = o(x^2), \quad \lambda = \frac{n-2}{n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

где $Y(\cdot, \cdot)$ – C^∞ -гладкая функция, а также двух C^∞ -гладких изотропных геодезических

$$y = 0 \quad \text{и} \quad y = 2x^2 + o(x^2). \tag{16}$$

В малой окрестности точки q каждая геодезическая семейства (15) лежит в криволинейном секторе, ограниченном изотропными геодезическими (16), см. рис. 1 (справа).

Орбитальная нормальная форма		
	топологическая	C^∞ -гладкая
W_1^c	$\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + 0 \frac{\partial}{\partial \zeta}$	$\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + 0 \frac{\partial}{\partial \zeta}$, где $\lambda = \frac{n-2}{n}$
W_0^c and W_2^c	$\xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + 0 \frac{\partial}{\partial \zeta}$	$\xi(n-1 + \Phi_1(\rho, \zeta)) \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta(2-n + \Phi_2(\rho, \zeta)) \frac{\partial}{\partial \eta} + \rho \Psi(\rho, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta}$, где $\rho = \xi^{n-2} \eta^{n-1}$; $(n-1)\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + (2-n)\eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \rho \frac{\partial}{\partial \zeta}$, если $\Psi(0, 0) \neq 0$.

Таблица 1: Орбитальные нормальные формы ростка поля (13).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем локальные координаты с центром в точке $q \in M$ и рассмотрим ростки поля (13) в его особых точках $(0, 0, u_i)$, $i = 0, 1, 2$, где u_i – допустимые значения переменной u из формулы (14). По лемме 2, ограничение поля (13) на любое из центральных многообразий W_i^c , $i = 0, 1, 2$, тождественно равно нулю. Поэтому топологические нормальные формы в таблице 1 являются тривиальным следствием принципа сведения [7, 8].

Теперь установим гладкие нормальные формы. При этом существенную роль играют резонансы между ненулевыми собственными значениями линейной части поля (13). По лемме 2, линейная часть поля (13) в любой точке центрального многообразия W_1^c имеет спектр $(1, \lambda, 0)$ с собственным значением $\lambda = \frac{n-2}{n}$. Согласно [9, 10], росток (13) в любой точке W_1^c орбитально C^∞ -гладко эквивалентен ростку

$$\left(\xi + \varphi(\zeta)\eta^{1/\lambda}\right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + 0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \tag{17}$$

в нуле, где $\varphi(\zeta) \equiv 0$, если число $1/\lambda$ не целое (нерезонансный случай).

Теперь рассмотрим случай, когда число $1/\lambda$ целое и докажем, что $\varphi(\zeta) \equiv 0$, если и только если в каждой точке $\omega_* \in W_1^c$ поле (13) имеет C^∞ -гладкую интегральную кривую, проходящую через эту точку ω_* с вертикальным касательным направлением ∂_u . Согласно замечанию 3, такие интегральные кривые существуют (и представляют собой прямые вертикальные линии). Это доказывает, что $\varphi(\zeta) \equiv 0$ и в двух оставшихся резонансных случаях $1/\lambda = 3$ ($n = 3$) и $1/\lambda = 2$ ($n = 4$).

Теперь докажем утверждение, сформулированное выше. Очевидно, что поле (17) имеет инвариантное слоение $\zeta = \text{const}$. Каждый инвариантный слой содержит единственную интегральную кривую $\eta = 0$, соответствующую собственному направлению с собственным значением 1, и однопараметрическое семейство интегральных кривых

$$\xi = \eta^{1/\lambda}(\alpha + \varphi(\zeta) \ln |\eta|), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

соответствующих собственному направлению с собственным значением λ . Все кривые (18) являются $C^{1/\lambda-1}$ -гладкими (но не $C^{1/\lambda}$ -гладкими в нуле), если $\varphi(\zeta) \neq 0$, и C^∞ -гладкими, если $\varphi(\zeta) = 0$. Без ограничения общности будем считать, что точка $\omega_* \in W_1^c$ пространства (x, y, u) соответствует точке $(0, 0, \zeta_*)$ пространства (ξ, η, ζ) . Равенство $\varphi(\zeta_*) = 0$ эквивалентно существованию хотя бы одной C^∞ -гладкой интегральной кривой поля (17) с касательным направлением ∂_η , лежащей на инвариантном слое $\{\zeta = \zeta_*\}$. Для завершения доказательства остается лишь заметить, что собственное направление ∂_η линейной части ростка (17) соответствует собственному направлению ∂_u линейной части ростка (13).

Линейная часть поля (13) в любой точке центральных многообразий W_0^c и W_2^c имеет спектр $(\lambda_1, \lambda_2, 0)$, где $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = \frac{n-2}{1-n}$, что дает резонанс

$$(n-2)\lambda_1 + (n-1)\lambda_2 = 0$$

с резонансным мономом $\rho = \xi^{n-2}\eta^{n-1}$, порождающий две бесконечные серии резонансов

$$(1+j(n-2))\lambda_1 + j(n-1)\lambda_2 = \lambda_1, \quad j(n-2)\lambda_1 + (1+j(n-1))\lambda_2 = \lambda_2, \quad j = 1, 2, \dots$$

Наличие бесконечного числа резонансов не позволяет установить простую нормальную форму, подобную (17), даже в конечно-гладкой категории, см. [9, 11]. Однако в данном случае имеют место C^∞ -гладкие орбитальные нормальные формы, указанные в табл. 1 (теорема 6 [9], см. также теорему 22 в [10]).

Теперь мы переходим к финальной части теоремы, связанной с проектированием интегральных кривых поля (13) на плоскость (x, y) вдоль направления оси u . Интегральные кривые поля (13), проходящие через точку $(0, 0, u_1)$, соответствуют интегральным кривым поля $\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda \eta \frac{\partial}{\partial \eta}$, лежащим на инвариантном слое $\{\zeta = 0\}$: одной кривой, совпадающей с осью η , и кривым однопараметрического семейства $\{\eta = \alpha|\xi|^\lambda, \zeta = 0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Сравнивая росток (13) в $(0, 0, u_1)$ с его нормальной формой $\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda \eta \frac{\partial}{\partial \eta}$, нетрудно заметить, что сопрягающий эти ростки диффеоморфизм $(x, y, u) \mapsto (\xi, \eta, \zeta)$ может быть выбран в виде

$$x = \xi, \quad u = u_1 + \eta + c_1\xi + c_2\zeta + \varphi(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \zeta + \psi(\xi, \eta, \zeta), \quad \varphi, \psi \in \mathfrak{M}^2, \quad (19)$$

где \mathfrak{M}^k , $k \geq 0$, – идеал, состоящий из k -плоских функций в кольце всех гладких функций. Подставляя $\xi = \zeta = 0$ в (19), с учетом соотношения $p = ux$ получаем $x = p = 0$. Следовательно, ось η не соответствует никакой геодезической.

Подставляя $\eta = \alpha|\xi|^\lambda$ и $\zeta = 0$ в (19), с учетом $x = \xi$ и $p = ux$ получаем соотношение $p = x(u_1 + f(x, \alpha|x|^\lambda))$ с некоторой гладкой функцией $f \in \mathfrak{M}^0$. Это дает нам соотношение $dy = pdx = x(u_1 + f(x, \alpha|x|^\lambda))dx$, где $xf(x, \alpha|x|^\lambda) = o(x)$ – некоторая C^1 -гладкая функция. Интегрируя последнее равенство, получаем $y = \frac{u_1}{2}x^2 + Y(x, \alpha|x|^\lambda)$. Здесь $Y(\cdot, \cdot)$ – гладкая функция и $Y(x, \alpha|x|^\lambda) = o(x^2)$ – C^2 -гладкая функция. После линейной замены $y \rightarrow 2y/u_1$ получаем семейство (15).

Топологические и гладкие нормальные формы, приведенные в таблице 1, показывают, что поле (13) имеет только две интегральные кривые, проходящие через особую точку $(0, 0, u_i)$ при $i = 0$ или 2 . При этом одна из этих двух интегральных кривых – прямая вертикальная линия, проекция которой на плоскость (x, y) является точкой (см. замечание 3 и лемму 2). Другая интегральная кривая имеет в точке $(0, 0, u_i)$ неvertикальное касательное направление, и ее проекция на плоскость (x, y) является гладкой кривой.

Таким образом, каждое из двух допустимых значений u_0 и u_2 дает по одной гладкой геодезической, проходящей через точку q с касательным направлением $p = 0$. Нетрудно видеть, что эти геодезические суть изотропные линии, являющиеся решениями дифференциальных уравнений $p = 0$ и $ax + bp = 0$, соответственно (см. формулу (10)). Принимая во внимание (14), после замены $y \rightarrow 2y/u_1$ получаем (16).

З а м е ч а н и е 4. Нормальные формы

$$3\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{n-2}{n} \eta \frac{\partial}{\partial \eta}$$

в теоремах 1, 2 имеют место не только в гладкой, но и в аналитической категории; см., например, [12]. Таким образом, в аналитическом случае формулы (7) и (15) дают представления геодезических в виде рядов Пуанкаре.

П р и м е р. Рассмотрим поверхность $z = y - 2x^2$ в трехмерном пространстве Бервальда-Моора (x, y, z) , $ds = (dx dy dz)^{\frac{1}{3}}$. В этом случае

$$F(x, y; p) = p(p - 4x), \quad \Delta = -2(p^2 - 4xp + 16x^2), \quad P = -4p(p + 4x),$$

и поле (6) можно записать в виде

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2p(p + 4x)}{p^2 - 4xp + 16x^2}. \quad (20)$$

Изотропные линии $y = 0$ и $y = 2x^2$ имеют первый порядок касания в точке 0, и двойное изотропное направление $p = 0$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Простая проверка показывает, что $y = 0$ и $y = 2x^2$ являются решениями уравнения (20), т. е. изотропными геодезическими (16).

Теорема 2 говорит, что геодезические семейства (15) следует искать в виде рядов Пуанкаре

$$y = t^6 + 3t^6 \sum_{i \geq 4} \frac{a_i}{i+3} t^{i-3}, \quad p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3t^2} \frac{dy}{dt} = 2t^3 + \sum_{i \geq 4} a_i t^i, \quad \text{где } x = t^3.$$

Подставляя выражение для p в (20), получаем рекуррентные соотношения для неизвестных коэффициентов a_i . Именно, $a_i = 0$ для всех нечетных i (это, впрочем, сразу следует из того, что поверхность $z = y - 2x^2$ симметрична относительно плоскости $x = 0$). Для четных индексов i мы имеем соотношения

$$24a_6 + 4a_4^3 = 0, \quad 48a_8 + 14a_4^2 a_6 = 0, \quad 72a_{10} + 16(a_4 a_6^2 + a_4^2 a_8) = 0$$

и т. д. Общая формула имеет вид

$$12(2i - 4)a_{2i} + b_{2i} = 0, \quad i = 3, 4, 5, \dots, \quad (21)$$

где b_{2i} – многочлен от коэффициентов a_{2j} , $j < i$, с нулевым свободным членом. Отсюда следует, что первый коэффициент a_4 выбирается произвольной, а все a_{2i} с $i \geq 3$ однозначно определяются из уравнений (21).

Эта процедура дает нам однопараметрическое семейство геодезических (15). В частности, выбор $a_4 = 0$ дает $a_{2i} = 0$ для всех $i \geq 3$, т. е. кривую $y = x^2$ – единственную C^∞ -гладкую неизотропную геодезическую семейства (15) (с параметром $\alpha = 0$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курбацкий А.Н., Павлова Н.Г., Ремизов А.О. Особенности геодезических потоков и линий в псевдофинслеровых пространствах. I // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 1. С. 66–75.
2. Курбацкий А.Н., Павлова Н.Г., Ремизов А.О. Особенности геодезических потоков и линий в псевдофинслеровых пространствах. II // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2005–2018.
3. Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981.

4. *Balan V., Neagu M.* Jet single-time Lagrange geometry and its applications. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2011.
5. *Matsumoto M.* Two-dimensional Finsler spaces whose geodesics constitute a family of special conic sections // *J. Math. Kyoto Univ.* 1995. V. 32. № 3. P. 357–376.
6. *Matsumoto M., Shimada H.* On Finsler spaces with 1-form metric. II. Berwald-Moor's metric $L = (y^1 y^2 \cdots y^n)^{1/n}$ // *Tensor (N.S.)* 1978. V. 32. № 3. P. 275–278.
7. *Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // *Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Динамические системы. Т. 1. М.: ВИНТИ, 1985.*
8. *Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M.* Invariant manifolds // *Lecture Notes in Mathematics. V. 583. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1977.*
9. *Ghezzi R., Remizov A. O.* On a class of vector fields with discontinuities of divide-by-zero type and its applications to geodesics in singular metrics // *Journal of Dynamical and Control Systems.* 2012. V. 18. № 1. P. 135–158.
10. *Roussarie R.* Modèles locaux de champs et de formes // *Asterisque.* 1975. V. 30. P. 1–181.
11. *Ремизов А.О.* Многомерная конструкция Пуанкаре и особенности поднятых полей для неявных дифференциальных уравнений // *СМФН.* 2006. Т. 19. С. 131–170.
12. *Воронин С.М.* Аналитическая классификация ростков голоморфных отображений с неизолированными неподвижными точками и постоянными мультипликаторами и ее приложения // *Вестник Челябинского гос. ун-та, сер. 3.* 1999. Т. 2(5). С. 12–30.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-01-00766 и 17-01-00849) и гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-8215.2016.1).

Поступила в редакцию 3 апреля 2017 г

Курбацкий Алексей Николаевич, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Московская школа экономики, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры эконометрики и математических методов экономики, e-mail: akurbatskiy@gmail.com

Павлова Наталья Геннадьевна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: natasharussia@mail.ru

Ремизов Алексей Олегович, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории проблем качественного исследования нелинейных динамических систем, e-mail: alexey-remizov@yandex.ru

SINGULARITIES OF GEODESIC FLOWS AND LINES IN PSEUDO-FINSLER SPACES. III

© **A. N. Kurbatskiy**¹⁾, **N. G. Pavlova**²⁾, **A. O. Remizov**³⁾

¹⁾ Moscow State (Lomonosov) University, Moscow School of Economics
1 (corp. 61), Leninskiye Gory, Moscow, Russian Federation, 119991

E-mail: akurbatskiy@gmail.com

²⁾ RUDN University

6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198

E-mail: natasharussia@mail.ru

³⁾ V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences
65 Profsoyuznaya St., Moscow, Russian Federation, 117997

E-mail: alexey-remizov@yandex.ru

This is a third paper in the series devoted to singularities of geodesic flows in generalized Finsler (pseudo-Finsler) spaces. In two previous papers, we defined geodesics as extremals of a certain auxiliary functional whose non-isotropic extremals coincide with extremals of the action functional, and studied generic singularities of so-defined geodesic flows in the case the pseudo-Finsler metric is given by a generic form of degree 3 on a two-dimensional manifold. In the present paper, we consider an important non-generic case: singularities of geodesic flows on two-dimensional surfaces embedded into the Berwald–Moor space of arbitrary dimension.

Keywords: Pseudo-Finsler spaces; Berwald–Moor metric; geodesics; singular points; resonances; normal forms

REFERENCES

1. *Kurbatskiy A.N., Pavlova N.G., Remizov A.O.* Osobennosti geodezicheskikh potokov i liniy v psevdofinslerovykh prostranstvakh. I // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2016. T. 21. Vyp. 1. S. 66–75.
2. *Kurbatskiy A.N., Pavlova N.G., Remizov A.O.* Osobennosti geodezicheskikh potokov i liniy v psevdofinslerovykh prostranstvakh. II // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2016. T. 21. Vyp. 6. S. 2005–2018.
3. *Rund H.* Differential'naya geometriya finslerovykh prostranstv. M.: Nauka, 1981.
4. *Balan V., Neagu M.* Jet single-time Lagrange geometry and its applications. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2011.
5. *Matsumoto M.* Two-dimensional Finsler spaces whose geodesics constitute a family of special conic sections // J. Math. Kyoto Univ. 1995. V. 32. № 3. P. 357–376.
6. *Matsumoto M., Shimada H.* On Finsler spaces with 1-form metric. II. Berwald-Moor's metric $L = (y^1 y^2 \dots y^n)^{1/n}$ // Tensor (N.S.) 1978. V. 32. № 3. P. 275–278.
7. *Arnol'd V.I., Il'yashenko Yu.S.* Obyknoennyye differentsial'nyye uravneniya // Sovr. problemy matem. Fundament. napravleniya. Dinamicheskie sistemy. T. 1. M.: VINITI, 1985.
8. *Hirsch M.W., Pugh C.C., Shub M.* Invariant manifolds // Lecture Notes in Mathematics. V. 583. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1977.
9. *Ghezzi R., Remizov A.O.* On a class of vector fields with discontinuities of divide-by-zero type and its applications to geodesics in singular metrics // Journal of Dynamical and Control Systems. 2012. V. 18. № 1. P. 135–158.
10. *Roussarie R.* Modèles locaux de champs et de formes // Asterisque. 1975. V. 30. P. 1–181.
11. *Remizov A.O.* Mnogomernaya konstruktsiya Puankare i osobennosti podnyatykh poley dlya neyavnykh differentsial'nykh uravneniy // SMFN. 2006. T. 19. S. 131–170.
12. *Voronin S.M.* Analiticheskaya klassifikatsiya rostkov golomorfnykh otobrazheniy s neizolirovannymi nepodvizhnymi tochkami i postoyannymi mul'tiplikatorami i ee prilozheniya // Vestnik CHelyabinskogo gos. un-ta, ser. 3. 1999. T. 2(5). S. 12–30.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects 16-01-00766, 17-01-00849) and the grant of the Russian Federation President for the state support of leading scientific schools № NSh-8215.2016.1.

Received 3 April 2017

Kurbatskii Alexey Nikolaevich, Moscow State (Lomonosov) University, Moscow School of Economics, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Econometric and Mathematical Methods in Economics, e-mail: akurbatskiy@gmail.com

Pavlova Natalia Gennadievna, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: natasharussia@mail.ru

Remizov Alexey Olegovich, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, e-mail: alexey-remizov@yandex.ru

Информация для цитирования:

Курбацкий А. Н., Павлова Н. Г., Ремизов А. О. Особенности геодезических потоков и линий в псевдофинслеровых пространствах. III // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 3. С. 539–551. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-539-551

Kurbatskiy A. N., Pavlova N. G., Remizov A. O. Osobennosti geodezicheskikh potokov i linii v psevdofinslerovykh prost-ranstvakh. III [Singularities of geodesic flows and lines in pseudo-Finsler spaces. III]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennyye i tekhnicheskije nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 3, pp. 539–551. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-539-551 (In Russian)