4. *Исламов Г.Г.* О некоторых приложениях теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения, II // Дифференциальные уравнения. Москва, 1990. Т. 26. № 2. С. 224–232.

5. *Лабовский С.М.* О положительных решениях двухточечной краевой задачи для линейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. Москва, 1988. Т. 24. № 10. С. 1695–1704.

6. *Чичкин Е.С.* Теорема о дифференциальном неравенстве для многоточечных краевых задач // Известия вузов. Серия: Математика. Казань, 1962. № 2. С. 170–179.

7. *Азбелев Н.В., Алвеш М.Ж., Бравый Е.И.* О сингулярной краевой задаче для линейного дифференциального уравнения второго порядка // Известия вузов. Серия: Математика. Казань, 1999. № 2. С. 3–11.

8. *Плаксина И.М.* О положительности функции Коши сингулярного линейного функционально-дифференциального уравнения // Известия вузов. Серия: Математика. Казань, 2013. № 10. С. 16-23.

9. *Domoshnitsky A.* Maximum principles and non-oscillation intervals for first order Volterra functional differential equations // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis. Waterloo (Ontario, Canada), 2008. V. 15. Issue 6. P. 769-814.

10. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (проект № 14–01–00338).

Поступила в редакцию 9 июня 2015 г.

Plaksina I.M. ON THE CAUCHY FUNCTION POSITIVITY FOR A SINGULAR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATION

The article discusses first order functional-differential equations with independent variable singularity. Vallée-Poussin-like theorem, the Cauchy function positivity conditions are obtained.

Key words: functional-differential equations; singular equations; Cauchy problem; Cauchy function; differential inequalities.

Плаксина Ирина Михайловна, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры автоматизации технологических процессов, e-mail: impl@list.ru

Plaksina Irina Mikhailovna, Perm National Research Polytechnical University, Perm, the Russian Federation, Senior Lecturer of the Process Automation Department, e-mail: impl@list.ru

УДК 517.929

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© В.П. Плаксина, И.М. Плаксина, Э.В. Плехова

Ключевые слова: сингулярное дифференциальное уравнение; задача Коши; функционально-дифференциальное уравнение.

Рассматривается квазилинейная задача Коши с нулевыми начальными условиями для сингулярного функционально-дифференциального уравнения второго порядка. Получены достаточные условия разрешимости рассматриваемой задачи Коши и соответствующей линейной задачи.

В предлагаемой работе рассматривается задача

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \ddot{x}(t) + \frac{m}{t^2}x\left(\frac{t}{\rho}\right) = f\big(t, (Tx)(t)\big), \qquad t \in [0, b], \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 0. \tag{2}$$

Здесь константы $m \in \mathbb{R}$ и $\rho \in \mathbb{R}$ таковы, что $m > 0$, $\rho > 1$. Функция $f(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условиям Каратеодори: функция $f(t,x)$ непрерывна по x при почти всех t; измерима по t при каждом x. Оператор T является линейным и вполне непрерывным. Пространства, в которых действует оператор T, будут определены ниже.

Особенность уравнения (1) заключается в том, что функция $\dfrac{m}{t^2}$ несуммируема на отрезке $[0,b]$, то есть это уравнение является сингулярным по независимой переменной [1] в точке $t = 0$. Кроме того, во втором слагаемом левой части уравнения (1) присутствует запаздывание специального вида. В правой части уравнения (1) присутствует вполне непрерывный линейный оператор T. В частности, оператором T может быть оператор внутренней суперпозиции S_h [2, с. 53], определяемый равенством $(S_h x)(t) = \begin{cases} x\big[h(t)\big], & \text{если } h(t) \in [0,b] \\ 0, & \text{если } h(t) \notin [0,b] \end{cases}$.

Обыкновенное (случай $\rho = 1$, T — тождественный оператор) сингулярное дифференциальное уравнение вида (1) используется во многих математических моделях. В частности, оператор вида $Hx = \ddot{x} + \dfrac{m}{t^2}x$ возникает при исследовании радиального уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом [3]. Оператор H присутствует в частном случае уравнения Эйлера.

Теория задач Коши и краевых задач для сингулярных дифференциальных уравнений разработана И.Т. Кигурадзе и его учениками (см., например, работы [1], [4]). В рамках этой теории сингулярные в точке $t = 0$ уравнения рассматриваются в пространствах функций, определенных на полуинтервале $(0,b]$. Однако существует несколько типов таких уравнений, которые можно изучать методами теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения [2, с. 18]. В этом случае решение определено на всем отрезке $[0,b]$. К таким уравнениям относятся уравнения, рассмотренные в работах [5]–[9].

Таким образом, предлагаемая работа посвящена исследованию еще одного типа сингулярных уравнений, к которому применима теория абстрактных функционально-дифференциальных уравнений.

Всюду далее будем полагать, что $1 < p < \infty$ и $p' = \dfrac{p}{p-1}$.

Пусть $L^p[0,b] = L^p$ — пространство измеримых функций $z\colon [0,b] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $\|z\|_{L^p} = \left(\int\limits_0^b |z(s)|^p\, ds\right)^{1/p} < \infty$. Пусть, далее, $W^{2,p}[0,b] = W^{2,p}$ — пространство абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций $x\colon [0,b] \to \mathbb{R}$, имеющих принадлежащую пространству L^p вторую производную. Через $W_0^{2,p}$ обозначим пространство функций $x \in W^{2,p}$, удовлетворяющих условиям (2). Норму в пространстве $W_0^{2,p}$ определим равенством $\|x\|_{W_0^{2,p}} = \|\ddot{x}\|_{L^p}$.

Решением задачи (1)–(2) будем называть элемент пространства $W_0^{2,p}$, почти всюду удовлетворяющий уравнению (1).

Будем пользоваться тем фактом, что пространство $W_0^{2,p}$ изометрически изоморфно пространству L^p. Взаимно-однозначное соответствие определим следующими соотношениями:

$$y(t) = \ddot{x}(t), \tag{3}$$

$$x(t) = (\Lambda y)(t) \equiv \int\limits_0^t (t-s)y(s)\,ds, \tag{4}$$

где $x \in W_0^{2,p}$, $y \in L^p$.

Используя изоморфизм (3)–(4), перейдем к эквивалентному задаче (1)–(2) интегральному уравнению

$$y(t) + \frac{m}{t^2}\int\limits_0^{t/\rho}\left(\frac{t}{\rho} - s\right)y(s)\,ds = f\big(t, (\mathcal{T}y)(t)\big), \tag{5}$$

где оператор $\mathcal{T}\colon L^p \to L^p$ представляет собой суперпозицию оператора $T\colon W_0^{2,p} \to L^p$ и оператора Λ.

Определим оператор $\mathcal{B}\colon L^p \to L^p$ равенством $(\mathcal{B}y)(t) = \int\limits_0^{t/\rho} \dfrac{t-\rho s}{\rho t^2} y(s)\,ds$.

Л е м м а 1. *Спектральный радиус оператора* $\mathcal{B}$ *равен* $r_1 = \rho^{-2+\frac{1}{p}} \dfrac{(p')^2}{p'+1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. С помощью теста Шура [10, с. 33], [11] покажем, что $\|\mathcal{B}\| \leqslant r_1$.

Согласно тесту Шура, для произвольного интегрального оператора $\mathcal{K}\colon L^p \to L^p$ с неотрицательным ядром $\mathcal{K}(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ существование почти всюду положительных функций $u_1, u_2\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\left[\int\limits_0^\infty \mathcal{K}(t,s)u_2(s)\,ds\right]^{p-1} \leqslant \alpha u_1(t), \tag{6}$$

и

$$\int\limits_0^\infty \mathcal{K}(t,s)u_1(t)\,dt \leqslant \beta\big[u_2(s)\big]^{p-1}, \tag{7}$$

гарантирует оценку $\big\|\mathcal{K}\big\|^p_{L^p\to L^p} \leqslant \alpha\beta$.

Пусть $\mathcal{K}(t,s) = \dfrac{t-\rho s}{\rho t^2}\theta(t-\rho s)$, где $\theta(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } \tau < 0. \end{cases}$ Для функций $u_1(t) = t^{-1/p'}$ и $u_2(s) = s^{-1/p}$ справедливы неравенства (6) и (7) с константами $\alpha = r_1^{p-1}$ и $\beta = r_1$ соответственно. Поэтому $\|\mathcal{B}\|_{L^p\to L^p} \leqslant r_1$. Следовательно,

$$r\big(\mathcal{B}\big) \leqslant r_1. \tag{8}$$

2. Положим $y_n(t) = t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}$. Нетрудно видеть, что y_n являются собственными функциями оператора $\mathcal{B}$, соответствующими собственным значениям

$$r_{1,n} = \rho^{-2+\frac{1}{p}-\frac{1}{n}} \frac{np'}{np'+n+p'} \frac{np'}{n+p'}.$$

Следовательно, $r\big(\mathcal{B}\big) \geqslant r_{1,n}$ для всех натуральных n. Так как $r_1 = \lim\limits_{n\to\infty} r_{1,n}$, то

$$r\big(\mathcal{B}\big) \geqslant r_1. \tag{9}$$

Сравнение оценок (8) и (9) завершает доказательство.

Л е м м а 2. *Пусть* $m < r_1^{-1}$. *Тогда спектральный радиус оператора* $\big(I + m\mathcal{B}\big)^{-1}$ *равен* $r_2 = \big(1 + mr_1\big)^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. В силу теоремы [12, с. 140] норма оператора $\big(I + m\mathcal{B}\big)^{-1}$ не превышает выражения $\big(1 - m\|\mathcal{B}\|\big)^{-1}$, равного r_2 . Поэтому

$$r\Big(\big(1 + m\mathcal{B}\big)^{-1}\Big) \leqslant r_2. \tag{10}$$

2. Положим $y_n(t) = t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}$. Нетрудно видеть, что y_n являются собственными функциями оператора $\big(I + m\mathcal{B}\big)^{-1}$, соответствующими собственным значениям $r_{2,n} = \big(1 + mr_{1,n}\big)^{-1}$. Следовательно, $r\Big(\big(1 + m\mathcal{B}\big)^{-1}\Big) \geqslant r_{2,n}$ для всех натуральных n . Так как $r_2 = \lim\limits_{n\to\infty} r_{2,n}$, то

$$r\Big(\big(1 + m\mathcal{B}\big)^{-1}\Big) \geqslant r_2. \tag{11}$$

Сравнение оценок (10) и (11) завершает доказательство.

Рассмотрим полуоднородную задачу Коши

$$\begin{cases} (\mathcal{L}x)(t) = z(t), & t \in [0, b], \\ x(0) = 0, & \dot{x}(0) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть* $|m| < r_1^{-1}$.

Тогда задача (12) *имеет единственное решение при любой правой части* $z \in L^p$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $y(t) = \ddot{x}(t)$. Тогда $y \in L^p$ и задача (12) эквивалентна интегральному уравнению

$$y(t) + m(\mathcal{B}y)(t) = z(t), \qquad t \in [0, b]. \tag{13}$$

Эквивалентность означает существование взаимно-однозначного соответствия между решениями уравнения (13) и задачи Коши (12). Соответствие определяется равенствами (3) и (4).

В условиях теоремы спектральный радиус оператора $m\mathcal{B}\colon L^p \to L^p$ меньше единицы. Поэтому оператор $I + m\mathcal{B}$ обратим и уравнение (13) однозначно разрешимо при любой правой части $z \in L^p$. Следовательно, при любой правой части $z \in L^p$ также однозначно разрешима задача (12). Теорема доказана.

Вернемся к задаче Коши (1)–(2) для квазилинейного сингулярного дифференциального уравнения.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $|m| < r_1^{-1}$ *;*

2) *оператор* T *вполне непрерывен;*

3) *существуют такая функция* $a_1 \in L^p$ *и такая константа* $a_2 \in \left(0, \dfrac{1}{r_2\|\mathcal{T}\|}\right)$, *что для всех значений* $t \in [0, b]$ *и произвольного элемента* $v \in \mathbb{R}$ *справедливо неравенство*

$$\big|f(t, v)\big| \leqslant a_1(t) + a_2|v|. \tag{14}$$

Тогда задача (1) – (2) *разрешима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая $\ddot{x} = y$, перейдем от задачи Коши (1)–(2) к эквивалентному интегральному уравнению (5). Запишем это уравнение в операторном виде:

$$(I + m\mathcal{B})y = \mathcal{F}y. \tag{15}$$

Здесь оператор $\mathcal{F}\colon L^p \to L^p$ определен равенством $(\mathcal{F}y)(t) = f\big(t, (\mathcal{T}y)(t)\big)$.

При выполнении первого условия в силу теоремы 1 оператор $I + m\mathcal{B}$ обратим и задача (12) однозначно разрешима при любой правой части.

В силу обратимости оператора $I + m\mathcal{B}$ уравнение (15) эквивалентно уравнению

$$y = \Psi y, \tag{16}$$

где оператор $\Psi\colon L^p \to L^p$ имеет вид $\Psi = (I + m\mathcal{B})^{-1}\mathcal{F}$.

Если функция f удовлетворяет неравенству (14), то для оператора Немыцкого $\mathcal{N}\colon L^p \to L^p$, определенного равенством $(\mathcal{N}z)(t) = f\big(t, z(t)\big)$, справедлива оценка $\|\mathcal{N}z\| \leqslant \leqslant \|a_1\| + a_2\|z\|$.

Оператор Ψ является суперпозицией вполне непрерывного линейного оператора $\mathcal{T}\colon L^p \to L^p$, непрерывного ограниченного оператора Немыцкого $\mathcal{N}$ и линейного ограниченного оператора $(I + m\mathcal{B})^{-1}$. Поэтому оператор Ψ вполне непрерывен. Кроме того, справедлива оценка $\|\Psi y\| \leqslant \mu_1 + \mu_2\|y\| \equiv \big\|(I + m\mathcal{B})^{-1}\big\|\big(\|a_1\| + a_2\|\mathcal{T}\|\|y\|\big)$.

Отсюда $\lim\limits_{\|y\|\to\infty} \dfrac{\big\|(I + m\mathcal{B})^{-1}\mathcal{F}y\big\|}{\|y\|} = \mu_2$. Из условия $a_2 < \dfrac{1}{r_2\|\mathcal{T}\|}$ следует $\mu_2 < 1$.

Применение теоремы 4 [12, с. 418], являющейся следствием из теоремы Шаудера, завершает доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Д.* Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы матем.: Новые достижения. Москва, 1987. Т. 30. С. 105-201.
2. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
3. *Волк В.Я.* О формулах обращения для дифференциального уравнения с особенностью при $x = 0$ // Успехи математических наук. Москва, 1953. Т. VIII. № 4 (56). С. 141-151.
4. *Kiguradze I., Sokhadze Z.* On the global solvability of the Cauchy problem for singular functional differential equations // Georgian mathematical journal. Tbilisi, 1997. V. 4. № 4. P. 355-372.
5. *Лабовский С.М.* Положительные решения двухточечной краевой задачи для сингулярного линейного функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. Москва, 1988. Т. 24. № 10. С. 1116-1123.
6. *Шиндяпин А.И.* О краевой задаче для одного сингулярного уравнения // Дифференциальные уравнения. Москва, 1984. Т. 3. № 11. С. 450-455.
7. *Азбелев Н.В., Алвеш М.Ж., Бравый Е.И.* О сингулярных краевых задачах для линейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка // Известия вузов. Серия: Математика. Казань, 1999. № 2. С. 3-11.
8. *Плаксина И.М.* О положительности функции Коши сингулярного линейного функционально-дифференциального уравнения // Известия вузов. Серия: Математика. Казань, 2013. № 10. С. 16-23.
9. *Абдуллаев А.Р., Плехова Э.В.* Об одной краевой задаче для сингулярного дифференциального уравнения второго порядка // Научно-технический вестник Поволжья. Казань, 2013. № 4. С. 30-35.
10. *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2. М.: Наука, 1985.
11. *Абдуллаев А.Р., Плаксина И.М.* Об оценке спектрального радиуса одного сингулярного интегрального оператора // Известия вузов. Серия: Математика. Казань, 2015. № 2. С. 3-9.
12. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 1 июня 2015 г.

Plaksina V.P., Plaksina I.M., Plekhova E.V. SOLVABILITY CONDITIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A SECOND ORDER QUASILINEAR SINGULAR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATION

The article is devoted to semi-homogeneous quasilinear Cauchy problem for a second order singular functional-differential equation. Sufficient solvability conditions of this Cauchy problem are obtained.

Key words: singular differential equation, Cauchy problem, functional-differential equation.

Плаксина Вера Павловна, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: vpplaksina@list.ru

Plaksina Vera Pavlovna, Perm National Research Polytechnical University, Perm, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: vpplaksina@list.ru

Плаксина Ирина Михайловна, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры автоматизации технологических процессов, e-mail: impl@list.ru

Plaksina Irina Mikhailovna, Perm National Research Polytechnical University, Perm, the Russian Federation, Senior Lecturer of the Process Automation Department, e-mail: impl@list.ru

Плехова Эльвира Валентиновна, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: elvira.plekhova@mail.ru

Plekhova Elvira Valentinovna, Perm National Research Polytechnical University, Perm, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: elvira.plekhova@mail.ru

УДК 69.003.13

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ФИЗИЧЕСКОГО ИЗНОСА ЖИЛЫХ ЗДАНИЙ ПО ПРАВИЛАМ ОЦЕНКИ ВСН 53-86

© К.М. Плотников, П.М. Симонов

Ключевые слова: физический износ жилых зданий; признаки износа; количественная оценка.

Построенная модель позволяет определить степень износа конструкций и элементов используя только наличие и количество признаков износа, что упрощает анализ износа жилых зданий.

Под физическим износом конструкции, элемента, системы инженерного оборудования и здания в целом следует понимать утрату ими первоначальных технико-эксплуатационных качеств (прочности, устойчивости, надежности и др.) в результате воздействия природно-климатических факторов и жизнедеятельности человека [1].

Существуют три основных метода расчета физического износа [2]: экспертный (нормативный); стоимостной; метод расчета срока жизни здания.

В основу метода экспертного метода положена шкала экспертных оценок для определения физического износа, изложенная в Ведомственном нормативном документе ВСН 53-86р «Правила оценки физического износа жилых зданий». Величина износа определяется по внешним (видимым) повреждениям элементов. Именно данным методом пользуются работники БТИ (бюро технической инвентаризации) при составлении технических паспортов на здания.