УДК 517.98

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПАРА-ЭРМИТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С ПСЕВДООРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППОЙ ДВИЖЕНИЙ

© **С.В. Цыкина**

Ключевые слова: группы и алгебры Ли; псевдоортогональные группы; симплектические пространства; пара-эрмитовы симметрические пространства; инвариантная метрика; инвариантная симплектическая форма; скобка Пуассона; оператор Лапласа-Бельтрами.

Изучается дифференциально-геометрическая структура пара-эрмитовых симметрических пространств G/H, для которых группа G есть псевдоортогональная группа $\mathrm{SO}_0(p,q)$.

Мы рассматриваем пара-эрмитовы симметрические пространства G/H, для которых группа G есть псевдоортогональная группа $\mathrm{SO}_0(p,q)$, а связная компонента единицы H_e подгруппы H есть $\mathrm{SO}_0(1,1)\times\mathrm{SO}_0(p-1,q-1)$. Все такие пространства (с данной G) получаются факторизацией из «самого большого» пространства G/H_e. Отображение накрытия не более чем четырехкратно. Размерность всех этих пространств G/H равна $2n-4$, где $n=p+q$, сигнатура есть $(n-2,n-2)$, а ранг равен 2.

Введем в пространстве $\mathbb{R}^n$ следующую билинейную форму:

$$[x,y]=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,x_i\,y_i,$$

где $\lambda_1=\ldots=\lambda_p=-1$, $\lambda_{p+1}=\ldots=\lambda_n=1$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$ — векторы из $\mathbb{R}^n$. Группа $G=\mathrm{SO}_0(p,q)$, $n=p+q$, есть связная компонента единицы в группе линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ с определителем 1, сохраняющих билинейную форму $[x,y]$. Для простоты мы будем рассматривать общий случай $p>1$, $q>1$. Мы считаем, что группа G действует в $\mathbb{R}^n$ справа: $x\mapsto xg$, так что векторы x из $\mathbb{R}^n$ будем записывать в виде строки.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы $G=\mathrm{SO}_0(p,q)$ состоит из вещественных матриц X порядка n, удовлетворяющих условию $X'I+IX=0$, где $I=\mathrm{diag}\,\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$, штрих означает матричное транспонирование. Группа G действует в $\mathfrak{g}$ сопряжениями: $X\mapsto g^{-1}Xg$. Будем записывать матрицы n-ого порядка в блочном виде, отвечающем разбиению $n=1+(n-2)+1$. Наше однородное пространство G/H есть G-орбита в алгебре $\mathfrak{g}$, содержащая

$$Z_0=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathrm{ad}\,Z_0$ в алгебре $\mathfrak{g}$ имеет три собственных значения: $-1,0,+1$. Соответственно, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ распадается в прямую сумму собственных подпространств: $\mathfrak{g}=\mathfrak{q}^-+\mathfrak{h}+\mathfrak{q}^+$, где $\mathfrak{h}$ это алгебра Ли подгруппы H. Оба пространства $\mathfrak{q}^\pm$ являются абелевыми подалгебрами алгебры $\mathfrak{g}$, они имеют размерность $n-2$. Подгруппа H сохраняет подпространства $\mathfrak{q}^\pm$ в присоединенном представлении.

Обозначим через $\mathcal{C}$ конус $[x,x]=0$, $x \neq 0$, в $\mathbb{R}^n$. Возьмем в конусе следующие две точки: $s^+ = (1,0,\ldots,0,1)$, $s^- = (1,0,\ldots,0,-1)$. Рассмотрим следующие сечения конуса:

$$\begin{aligned}\Gamma^+ &= \{x_1 + x_n = 2\} = \{[x,s^-] = -2\},\\ \Gamma^- &= \{x_1 - x_n = 2\} = \{[x,s^+] = -2\}\end{aligned}$$

Сечения $\Gamma^\pm$ пересекаются почти с каждой образующей конуса $\mathcal{C}$. Поэтому линейное действие группы G на конусе дает соответствующее дробно-линейное действие группы G на $\Gamma^\pm$. Для подгрупп $Q^\pm = \exp \mathfrak{q}^\pm$ это действие оказывается линейным: $x \mapsto xg$. Кроме того, подгруппы $Q^\pm$ действуют на $\Gamma^\pm$ просто транзитивно. Это позволяет ввести координаты на Γ^- и на Γ^+ с помощью векторов $\xi = (\xi_2,\ldots,\xi_{n-1})$ из $\mathfrak{q}^-$ и $\eta = (\eta_2,\ldots,\eta_{n-1})$ из $\mathfrak{q}^+$, соответственно, а именно, для $x \in \Gamma^-$ и $y \in \Gamma^+$ имеем:

$$\begin{aligned}x &= (1+\langle\xi,\xi\rangle, 2\xi, -1+\langle\xi,\xi\rangle),\\ y &= (1+\langle\eta,\eta\rangle, 2\eta, 1-\langle\eta,\eta\rangle),\end{aligned}$$

где $\langle\varphi,\psi\rangle$ – билинейная форма на $\mathbb{R}^{n-2}$ с матрицей $I_1 = \mathrm{diag}\,\{\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}\}$. Стационарная подгруппа в G пары (s^-,s^+) есть H, следовательно, мы получаем вложение $\Gamma^- \times \Gamma^+ \hookrightarrow G/H$. Таким образом, (ξ,η) из $\mathbb{R}^{n-2}\times\mathbb{R}^{n-2}$ являются локальными координатами на G/H. Назовем эти координаты *орисферическими координатами.*

Отметим, что:

$$[x(\xi), y(\eta)] = -2N(\xi,\eta),$$

где $N(\xi,\eta)$ дается формулой:

$$N(\xi,\eta) = 1 - 2\langle\xi,\eta\rangle + \langle\xi,\xi\rangle\langle\eta,\eta\rangle. \tag{1}$$

Эта функция есть многочлен от ξ,η степени 2 отдельно по ξ и по η.

Форма Киллинга $B_\mathfrak{g}(X,Y) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}X \cdot \mathrm{ad}_\mathfrak{g}Y)$ есть

$$B_\mathfrak{g}(X,Y) = (n-2)\mathrm{tr}\,(XY).$$

Ограничение формы Киллинга $B_\mathfrak{g}$ на подпространство $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^- + \mathfrak{q}^+$ является невырожденной билинейной формой сигнатуры $(n-2, n-2)$. Соответствующая квадратичная форма на $\mathfrak{q}$:

$$B_\mathfrak{g}(X,X) = (n-2)\mathrm{tr}\,(X^2), \quad X \in \mathfrak{q}, \tag{2}$$

в координатах (ξ,η) есть

$$B_\mathfrak{g}(X,X) = 4(n-2)\langle\xi,\eta\rangle. \tag{3}$$

Следовательно, матрица квадратичной формы $B_\mathfrak{g}(X,X)$ на $\mathfrak{q}$ в координатах (ξ,η) есть

$$4(n-2)\begin{pmatrix} 0 & I_1 \\ I_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Напишем в орисферических координатах ξ,η на G/H инвариантную метрику ds^2, оператор Лапласа-Бельтрами Δ, инвариантную симплектическую форму ω и соответствующую скобку Пуассона. Все они порождаются формой Киллинга $B_\mathfrak{g}$ на пространстве $\mathfrak{q}$, см. (3).

В силу (3) значение метрики ds^2 в точке x^0 (тогда $\xi = \eta = 0$) есть, с точностью до множителя, $\sum \lambda_i\, d\xi_i\, d\eta_i$. Нормируем метрику так, чтобы в точке x^0 она была такой:

$$ds^2\Big|_{x^0} = 2\sum \lambda_i\, d\xi_i\, d\eta_i. \tag{4}$$

Теперь напишем явное выражение для ds^2. Для функции $f(\xi,\eta)$ будем обозначать через $d_\xi f$ и $d_\eta f$ частичные дифференциалы:

$$d_\xi f = \sum \frac{\partial f}{\partial \xi_k}\, d\xi_k, \qquad d_\eta f = \sum \frac{\partial f}{\partial \eta_i}\, d\eta_i.$$

Т е о р е м а 1. *Инвариантная метрика ds^2 на G/H с нормировкой (4) дается формулой*

$$ds^2 = -d_\xi\, d_\eta\, \ln N, \tag{5}$$

где $N = N(\xi,\eta)$; в координатах имеем:

$$ds^2 = 2\sum w_{ik}\, d\xi_i\, d\eta_k\,, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} w_{ik} = &-\frac{1}{2N^2}\left(N\,\frac{\partial^2 N}{\partial\xi_i\partial\eta_k} - \frac{\partial N}{\partial\xi_i}\frac{\partial N}{\partial\eta_k}\right) = \\ &= \frac{\lambda_i\lambda_k}{N^2}\left\{N\cdot\big(\lambda_k\delta_{ik} - 2\xi_i\eta_k\big) + 2\cdot\big(\eta_i - \langle\eta,\eta\rangle\xi_i\big)\cdot\big(\xi_k - \langle\xi,\xi\rangle\eta_k\big)\right\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью разложений Гаусса и анти-Гаусса для всякого элемента $g \in G$ определим преобразование $\xi \mapsto \widetilde{\xi} = \xi\bullet g$ пространства $\mathfrak{q}^-$ и преобразование $\eta \mapsto \widehat{\eta} = \eta\circ g$ пространства $\mathfrak{q}^+$, соответственно, а именно, $\widetilde{\xi}$ и $\widehat{\eta}$ получаются соответственно из разложений

$$\exp X_\xi \cdot g = \exp\widetilde{Y}\cdot\widetilde{h}\cdot\exp X_{\widetilde{\xi}}, \tag{8}$$

$$\exp Y_\eta \cdot g = \exp\widehat{X}\cdot\widehat{h}\cdot\exp Y_{\widehat{\eta}}, \tag{9}$$

где $\widehat{Y} \in \mathfrak{q}^+$, $\widetilde{X} \in \mathfrak{q}^-$. Эти действия определены на плотных множествах, зависящих от g. Функция $N(\xi,\eta)$ преобразуется при этом следующим образом:

$$N(\widetilde{\xi},\widehat{\eta}) = N(\xi,\eta)\cdot\chi(\widetilde{h})^{-1}\cdot\chi(\widehat{h}), \tag{10}$$

где $\widetilde{h},\widehat{h}$ берутся из (8), (9).

Покажем, что для всякого $g \in G$ квадратичная дифференциальная форма $d_\xi\, d_\eta\, \ln N$ на G/H инвариантна относительно преобразований $\xi \mapsto \widetilde{\xi}$, $\eta \mapsto \widehat{\eta}$, задаваемыми формулами (8), (9), то есть что для всякого $g \in G$ справедливо

$$d_\xi\, d_\eta\, \ln N(\widetilde{\xi},\widehat{\eta}) = d_\xi\, d_\eta\, \ln N(\xi,\eta). \tag{11}$$

Формула (10) дает

$$\ln N(\widetilde{\xi},\widehat{\eta}) = \ln N(\xi,\eta) - \ln\chi(\widetilde{h}) + \ln\chi(\widehat{h}).$$

В правой части здесь второе слагаемое зависит только от ξ, а третье слагаемое зависит только от η. Поэтому дифференциал $d_\xi\, d_\eta$ на этих слагаемых обращается в нуль, и мы получаем (11).

Проверим нормировку (4). В силу (1) разложение функции $\ln N(\xi,\eta)$ в точке x^0, то есть в точке $\xi=0,\eta=0$, таково:

$$\ln N(\xi,\eta) = -2\langle\xi,\eta\rangle + \ldots .$$

Следовательно,

$$-d_\xi\, d_\eta\, \ln N(\xi,\eta)\Big|_{x^0} = 2\,\langle d\xi\,,\, d\eta\rangle,$$

а это и есть (4).

Формулы (6), (7) сразу получаются из (5) и (1). □

Пусть w^{-1} имеет матричные элементы w^{ik}, тогда

$$w^{ik} = N^2\,\lambda_i\,\lambda_k\,w_{ki}\,.$$

Отсюда и по (6), (7) получаем

$$\begin{aligned} w^{ik} =& -\frac{1}{2}\,\lambda_i\lambda_k\left(N\,\frac{\partial^2 N}{\partial\xi_k\partial\eta_i} - \frac{\partial N}{\partial\xi_k}\frac{\partial N}{\partial\eta_i}\right) = \\ =& N\cdot\big(\lambda_k\delta_{ik} - 2\xi_k\eta_i\big) + 2\cdot\big(\eta_k - \langle\eta,\eta\rangle\xi_k\big)\cdot\big(\xi_i - \langle\xi,\xi\rangle\eta_i\big). \end{aligned} \tag{12}$$

Итак, в переменных $d\xi_2,\ldots,d\xi_{n-1}$, $d\eta_2,\ldots,d\eta_{n-1}$ (всего $2n-4$ переменных) матрица квадратичной формы ds^2 есть

$$W = \begin{pmatrix} 0 & w \\ w' & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

штрих означает транспонирование. Определитель матрицы w равен $N^{2-n}\det I_1$, поэтому определитель матрицы W равен $N^{2(2-n)}\cdot(-1)^{n-2}$, тогда

$$\sqrt{|\det W|} = |N|^{2-n}. \tag{14}$$

Обратная матрица для W есть

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & {w'}^{-1} \\ w^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Напомним, что оператор Лапласа–Бельтрами Δ на многообразии с метрикой $ds^2 = \sum g_{ij}dx_idx_j$ дается формулой

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\overline{g}}}\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\sum_i g^{ij}\sqrt{\overline{g}}\,\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{16}$$

где $\overline{g} = |\det(g_{ij})|$, (g^{ij}) – обратная матрица для матрицы (g_{ij}).

Т е о р е м а 2. *Оператор Лапласа–Бельтрами для нашего многообразия G/H, отвечающий метрике ds^2, см. (6), есть*

$$\Delta = 2\sum_{ik} w^{ik}\,\frac{\partial^2}{\partial\xi_k\,\partial\eta_i}\,, \tag{17}$$

где коэффициенты w^{ik} даются формулой (12).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По (16) и по (13), (14), (15) имеем

$$\begin{aligned} \Delta f = & N^{\,n-2}\sum_k \frac{\partial}{\partial\xi_k}\sum_i N^{\,2-n}\,w^{ik}\,\frac{\partial f}{\partial\eta_i} + \\ & + N^{\,n-2}\sum_i \frac{\partial}{\partial\eta_i}\sum_k N^{\,2-n}\,w^{ki}\,\frac{\partial f}{\partial\xi_k}\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Покажем, что в окончательном выражении для Δf отсутствуют частные производные первого порядка $\dfrac{\partial f}{\partial \xi_k}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial \xi_k}$.

Покажем, что в (18) коэффициент, например, при $\dfrac{\partial f}{\partial \eta_i}$ равен нулю. Для этого надо показать, что

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \sum_i N^{\,2-n}\, w^{ik} = 0.$$

Обозначим здесь левую часть через T_i и используем (12). После приведения подобных членов мы получим

$$T_i = -\frac{1}{2}\,\lambda_i\, N^{\,2-n} \Biggl\{ (2-n) \sum_k \lambda_k \cdot \frac{\partial N}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial^2 N}{\partial \xi_k\, \partial \eta_i} + N \sum_k \lambda_k \cdot \frac{\partial^3 N}{\partial \xi_k^2\, \partial \eta_i} + \\ + (n-2)\,\frac{1}{N} \sum_k \lambda_k \cdot \left(\frac{\partial N}{\partial \xi_k}\right)^2 \cdot \frac{\partial N}{\partial \eta_i} - \sum_k \lambda_k \cdot \frac{\partial^2 N}{\partial \xi_k^2} \cdot \frac{\partial N}{\partial \eta_i} \Biggr\}. \qquad (19)$$

Обозначим для краткости $\langle \xi, \xi \rangle = A$, $\langle \eta, \eta \rangle = B$. Вычисляем:

$$\frac{\partial N}{\partial \xi_k} = -2\lambda_k\,(\eta_k - B\xi_k)\,, \quad \frac{\partial^2 N}{\partial \xi_k^2} = 2\lambda_k B,$$

Поэтому

$$\sum_k \lambda_k\, \frac{\partial^2 N}{\partial \xi_k^2} = 2(n-2)B,$$

$$\sum_k \lambda_k \left(\frac{\partial N}{\partial \xi_k}\right)^2 = \sum_k 4(B - 2\langle \xi, \eta \rangle + B^2 A) = 4BN,$$

$$\sum_k \lambda_k\, \frac{\partial^3 N}{\partial \xi_k^2\, \partial \eta_i} = 2(n-2)\,\frac{\partial B}{\partial \eta_i}\,,$$

$$\sum_k \lambda_k\, \frac{\partial N}{\partial \xi_k}\, \frac{\partial^2 N}{\partial \xi_k\, \partial \eta_i} = \frac{1}{2}\, \frac{\partial}{\partial \eta_i} \sum_k \lambda_k \left(\frac{\partial N}{\partial \xi_k}\right)^2 = 2\left(\frac{\partial B}{\partial \eta_i} N + B \frac{\partial N}{\partial \eta_i}\right).$$

Подставляя это в (19), получим, что $T_i = 0$. Аналогично доказывается, что коэффициент при $\dfrac{\partial f}{\partial \xi_k}$ равен нулю. □

Симплектическая структура ω на G/H определяется следующей билинейной формой на $\mathfrak{q}$:

$$\omega(X, Y) = \mathrm{const} \cdot B_{\mathfrak{g}}(X, \mathrm{ad}\, Z_0 \cdot Y).$$

Нормируем ее аналогично (4): ее значение в точке x^0 есть

$$\omega_{x^0} = 2 \sum \lambda_i\, d\xi_i \wedge d\eta_i. \qquad (20)$$

Т е о р е м а 3. *Инвариантная симплектическая форма ω на G/H с нормировкой* (20) *дается формулой*

$$\omega = 2 \sum_{ik} w_{ik}\, d\xi_i \wedge d\eta_k. \qquad (21)$$

Матрица этой формы в переменных $d\xi_2, \ldots, d\eta_{n-1}$ есть

$$\begin{pmatrix} 0 & w \\ -w' & 0 \end{pmatrix},$$

Обратная к ней матрица есть

$$\begin{pmatrix} 0 & -w'^{-1} \\ w^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

ср. (13), (15).

Для многообразия M с симплектической формой $\omega = \sum \omega_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$ скобка Пуассона есть

$$\{f, g\} = \sum \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

где (ω^{ij}) – обратная матрица для матрицы (ω_{ij}), см. (12). Это дает следующую теорему.

Т е о р е м а 4. *Для нашего многообразия G/H скобка Пуассона $\{f, g\}$, порожденная формой ω, см.* (21) *, есть*

$$\{f, g\} = \sum_{ik} \left(-w^{ik} \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \frac{\partial g}{\partial \eta_i} + w^{ik} \frac{\partial f}{\partial \eta_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_k} \right) =$$

$$= \sum_{ik} w^{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_k} - \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \frac{\partial g}{\partial \eta_i} \right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tsykina S.V.* Realizations of para-Hermitian spaces with pseudo-orthogonal group of translations // Tambov University Reports. Series Natural and Technical Sciences. Tambov, 2013. V. 18. Iss. 6. P. 2831-2835.

2. *Цыкина С.В.* Операторы Лапласа на пара-эрмитовых пространствах с псевдоортогональной группой движений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2008. Т. 13. Вып. 6. С. 620–631.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ 13-01-00952-а, Госзаданием Министерства образования и науки 2014/285, проект № 2476 и Фондом содействия отечественной науке.

Поступила в редакцию 16 мая 2015 г.

Tsykina S.V. DIFFERENTIAL-GEOMETRICAL STRUCTURE OF PARA-HERMITIAN SPACES WITH A PSEUDO-ORTHOGONAL GROUP OF TRANSLATIONS

We study differential-geometrical structure of para-Hermitian symmetric spaces G/H for that the group G is a pseudo-orthogonal group $\mathrm{SO}_0(p, q)$

Key words: Lie groups and Lie algebras; pseudo-orthogonal groups; symplectic spaces; para-Hermitian symmetric spaces; invariant metric; invariant symplectic form; Poisson bracket; Laplace-Beltrami operator.

Цыкина Светлана Викторовна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, ассистент кафедры математического анализа, e-mail: v.molchanov@bk.ru

Tsykina Svetlana Viktorovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Assistant of the Mathematical Analysis Department, e-mail: v.molchanov@bk.ru