

УДК 517.51

УСЛОВИЯ ПРАВИЛЬНОСТИ КВАЗИНОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

© И.В. Шрагин

Ключевые слова: ограниченное множество; квазинорма; правильное пространство; генфункция; пространство Муселяка–Орлича.

Рассматриваются квазинормированные пространства, порождаемые генфункциями. Для этих пространств получены необходимые и достаточные условия их правильности, т. е. равносильности двух понятий ограниченности множеств: в смысле метрики и в смысле топологии векторного пространства.

§1. Введение

Понятие правильного квазинормированного пространства (КНП) введено в [1], где приведены (без доказательств) некоторые условия правильности КНП, порождаемых генфункциями (в частности, пространств Муселяка–Орлича). В [2] дано полное изложение результатов из [1] и некоторых дополнительных результатов.

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия правильности указанных пространств и приведены примеры применения этих условий. Для удобства чтения излагаются также основные результаты из [2].

§2. Предварительные сведения

Пусть X - векторное пространство ($X \neq \{0\}$) над полем скаляров $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Всюду в дальнейшем α, δ, ϵ - положительные, а k, n - натуральные числа; через 0 обозначается нулевой элемент как в X , так и в $\mathbb{K}$.

О п р е д е л е н и е 1. Функция $M : X \rightarrow [0, \infty]$ называется *генфункцией* при выполнении условий:

- (a) $M(0) = 0$;
- (b) $\forall (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X) M(\lambda x) = M(|\lambda|x)$ (в частности, $M(-x) = M(x)$);
- (c) $\forall (x, y \in X, a \in (0, 1)) M(ax + (1-a)y) \leq M(x) + M(y)$;
- (d) $(\forall x \neq 0) \lim_{\alpha \rightarrow \infty} M(\alpha x) > \lim_{\alpha \rightarrow 0} M(\alpha x) = 0$.

Заметим, что из (a) и (c) (при $y = 0$) вытекает неубывание функции M на каждом луче $\{\beta x : \beta \geq 0\} (x \neq 0)$, а значит - существование пределов в (d).

При данной генфункции M равенство

$$\|x\|_M := \inf\{a > 0 : M(a^{-1}x) \leq a\} \quad (1)$$

определяет ([3]) в X квазинорму (иначе, F -норму). Это значит ([4]), что $0 \leq \|x\|_M < \infty$; $\|x\|_M = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$; $\| -x \|_M = \|x\|_M$; $\|x + y\|_M \leq \|x\|_M + \|y\|_M$; $(\forall \lambda \in \mathbb{K}) \|\lambda x\|_M \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ (т. е. при $\|x\|_M \rightarrow 0$); $(\forall x \in X) \lambda x \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Отметим, что, как следует из (b), $\|\lambda x\|_M = \|\lambda\| \|x\|_M$.

Через X_M обозначим пространство X , наделенное квазинормой $\|\cdot\|_M$. Ясно, что квазинорма $\|\cdot\|_M$ порождает в X метрику d , где $d(x, y) = \|x - y\|_M$. Но так как в пространстве X_M линейные операции непрерывны ([3], Theorem 1.5), то оно является топологическим векторным пространством (ТВП). Поэтому к КНП X_M применимы два понятия ограниченности множества: в смысле метрики d (d -ограниченность) и в смысле ТВП (ТВ-ограниченность). Напомним, что множество A в ТВП называется *ТВ-ограниченным* [5] при выполнении условия:

$$\text{если } (\forall k)x_k \in A, \lambda_k \in \mathbb{K}, \text{ причем } \lambda_k \rightarrow 0, \text{ то } \lambda_k x_k \rightarrow 0. \quad (2)$$

Нетрудно показать, что в ситуации КНП X_M условие (2) равносильно условию:

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} \{\|\lambda x\|_M : x \in A\} = 0, \quad (3)$$

т. е. $\lambda x \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ равномерно по $x \in A$. Известно (см., например, [2]), что в произвольном КНП из ТВ-ограниченности множества вытекает его d -ограниченность. Докажем это утверждение для КНП X_M . Для этого нам потребуется

Л е м м а 1. Если $|\lambda| \leq 1$, то $(\forall x)\|\lambda x\|_M \geq |\lambda| \|x\|_M$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, можно считать, что $\lambda \neq 0$. Тогда если $a > 0$ и $M(a^{-1}\lambda x) \leq a$, то $M(a^{-1}\lambda x) \leq a|\lambda|^{-1}$. Так что в силу (1)

$$\|\lambda x\|_M \geq \inf\{a > 0 : M(a^{-1}|\lambda|x) \leq a|\lambda|^{-1}\} = |\lambda| \inf\{b > 0 : M(b^{-1}x) \leq b\},$$

где $b = a|\lambda|^{-1}$. Тем самым лемма доказана. $\square$

Т е о р е м а 1. Если множество A в КНП X_M ТВ-ограничено, то оно и d -ограничено.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0 < |\lambda| \leq 1$. Тогда в силу Леммы 1

$$(\forall x \in A)\|x\|_M \leq |\lambda|^{-1} \sup\{\|\lambda x\|_M : x \in A\}.$$

Так как множество A ТВ-ограничено, то в силу (3) $(\forall x \in A)\|x\|_M \leq |\lambda|^{-1}$ при достаточно малом λ , т. е. A d -ограничено. $\square$

О п р е д е л е н и е 2. КНП называется *правильным*, если в нем всякое d -ограниченное множество является и ТВ-ограниченным, т. е. оба понятия ограниченности равносильны.

Очевидно, всякое нормированное пространство (это частный случай КНП) правильно. С другой стороны, так как ненулевые подпространства в ТВП не являются ТВ-ограниченными ([6], §1.29), то КНП, содержащее d -ограниченное подпространство E ($E \neq \{0\}$), не правильно. Примером такого пространства служит КНП, порожденное генфункцией $M : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, где $M(x) = |x|(1 + |x|)^{-1}$, так как в этом случае $\{x \in \mathbb{R} : \|x\|_M < 1\} = \mathbb{R}$.

§3. Свойства генфункции, порождающей правильное КНП

Следующая теорема содержит необходимое условие правильности КНП X_M .

Т е о р е м а 2. Если пространство X_M правильно, то

$$(\forall x \neq 0) \lim_{\alpha \rightarrow \infty} M(\alpha x) = \infty. \quad (4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $a := \lim_{\alpha \rightarrow \infty} M(\alpha x_0) < \infty$ при некотором $x_0 \neq 0$, и рассмотрим подпространство $E := \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{K}\}$. Оно, как указано выше, не является ТВ-ограниченным. С другой стороны,

$$(\forall x \in E)M(a^{-1}x) = M(a^{-1}|\lambda|x_0) \leq a,$$

так что $(\forall x \in E)\|x\|_M \leq a$, т. е. E d -ограничено, что противоречит правильности КНП X_M . $\square$

В §4 будет показано, что условие (4), вообще говоря, не достаточно для правильности КНП X_M , в отличие от следующего частного случая.

Пусть X - нормированное пространство с нормой $|\cdot|$ (обозначаемой так же, как и модуль в $\mathbb{K}$). Пусть, далее, $(\forall x \in X) M(x) := \Phi(|x|)$, где $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ - неубывающая функция, для которой

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \Phi(\alpha) > \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Phi(\alpha) = 0.$$

Очевидно, M является генфункцией, которую назовем *простейшей* генфункцией. Условие (4) для простейшей генфункции означает, что $\Phi(\alpha) \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow \infty$.

Далее нам потребуется критерий сходимости в КНП X_M ([3], Theorem 1.6):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_M = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } (\forall \alpha) \lim_{k \rightarrow \infty} M(\alpha x_k) = 0. \quad (5)$$

Т е о р е м а 3. *Если для простейшей генфункции M выполняется условие (4), то КНП X_M правильно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим при $r > 0$

$$B_r := \{x \in X : \|x\|_M < r\} \quad (6)$$

и покажем, что $b_r := \sup\{|x| : x \in B_r\} < \infty$. Действительно, в противном случае $\exists (x_n \in B_r, n = 1, 2, \dots) : |x_n| \rightarrow \infty$, откуда $M(r^{-1}x_n) = \Phi(r^{-1}|x_n|) \rightarrow \infty$, что противоречит неравенству: $(\forall n) M(r^{-1}x_n) \leq r$ (см. (1)).

Далее, пусть $(\forall k) x_k \in B_r, \lambda_k \in \mathbb{K}$ и $\lambda_k \rightarrow 0$. Тогда

$$(\forall \alpha) M(\alpha \lambda_k x_k) = \Phi(\alpha |\lambda_k| |x_k|) \leq \Phi(\alpha |\lambda_k| b_r) \rightarrow 0,$$

т.е., в силу (5), $\lambda_k x_k \rightarrow 0$.

Итак, любой шар $B_r \subset X_M$ ТВ-ограничен, так что КНП X_M правильно. $\square$

Таким образом, в силу Теорем 2 и 3, в случае простейшей генфункции M , условие (4) необходимо и достаточно для правильности КНП X_M .

С л е д с т в и е 1. *Если $\dim X = 1$, и генфункция M удовлетворяет условию (4), то КНП X_M правильно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $e \in X, e \neq 0$. Тогда равенство $|x| := |\lambda|$, где $x = \lambda e$, определяет норму в X . Положим $\Phi(\beta) = M(\beta e), \beta \geq 0$, так что $(\forall x \in X) M(x) = \Phi(|x|)$, т.е. M — простейшая генфункция. Остается применить Теорему 3. $\square$

Неизвестно, верно ли утверждение Следствия 1, если $1 < \dim X < \infty$.

Вернемся к произвольной генфункции M . Очевидно, в определении правильности КНП X_M в качестве d -ограниченного множества можно рассматривать произвольный шар B_r (см. (6)).

Т е о р е м а 4. *Пространство X_M правильно тогда и только тогда, когда при любом $r > 0$*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sup\{M(\lambda x) : x \in B_r\} = 0, \quad (7)$$

т.е. $M(\lambda x) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ равномерно по $x \in B_r$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\forall r > 0$ имеет место (7), и пусть при произвольном $r > 0$ $(\forall k) x_k \in B_r, \lambda_k \in \mathbb{K}$, причем $\lambda_k \rightarrow 0$. Тогда

$$(\forall \alpha) M(\alpha \lambda_k x_k) \leq \sup_k \{M(\alpha \lambda_k x_k) : x \in B_r\} \rightarrow 0,$$

так что $\lambda_k x_k \rightarrow 0$ (см. (5)). Это значит, что шар B_r ТВ-ограничен, т.е. КНП X_M правильно.

Предположим теперь, что при некотором $r > 0$ условие (7) не выполняется. Тогда существует такое ϵ , что $(\forall k) \exists (x_k \in B_r, \lambda_k \in \mathbb{K}) : \lambda_k \rightarrow 0$, а $M(\lambda_k x_k) > \epsilon$, т.е. $\lambda_k x_k$ не стремится к нулю в X_M . Это значит, что шар B_r не ТВ-ограничен, т.е. КНП X_M не правильно. $\square$

Применим этот критерий правильности к некоторым классам генфункций.

- 1) Если генфункция M p -однородна на X при некотором $p > 0$, т.е. $\forall(\alpha, x)M(\alpha x) = \alpha^p M(x)$, то КНП X_M правильно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $r > 0$. Тогда $\forall(x \in B_r, \lambda \in \mathbb{K})M(\lambda x) = (|\lambda|r)^p M(r^{-1}x) \leq |\lambda|^p r^{p+1}$, откуда следует (7). $\square$

- 2) Если генфункция M выпукла на X , то КНП X_M правильно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $r > 0$ и $|\lambda| \leq r^{-1}$. Тогда $\forall x \in B_r$, в силу выпуклости функции M , $M(\lambda x) \leq |\lambda|r M(r^{-1}x) \leq |\lambda|r^2$, откуда следует (7). $\square$

П р и м е р 1. Пусть $X = C[a, b]$, $M(x) = \int_a^b |x(t)|^p dt$ ($p > 0$). Так как M является генфункцией, p -однородной на X , то КНП X_M правильно. Заметим, что данная генфункция не является простейшей (при норме $|x| = \max\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$).

§4. Условия правильности секвенциального пространства Муселяка-Орлича

Пространство Муселяка-Орлича l_M порождается функцией $M : \mathbb{N} \times X \rightarrow [0, \infty]$, где $(\forall n)M(n, \cdot)$ является генфункцией на X . Такую функцию M будем также называть генфункцией.

Рассмотрим векторное пространство $X^{\mathbb{N}}$ последовательностей $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X$. Обозначим через Θ нулевой элемент в $X^{\mathbb{N}}$, т.е. $(\forall n)\Theta(n) = 0$.

Положим

$$I_M(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} M(n, \varphi(n)), \varphi \in X^{\mathbb{N}},$$

$$l_M = \{\varphi \in X^{\mathbb{N}} : (\exists \alpha) I_M(\alpha \varphi) < \infty\}.$$

Нетрудно проверить, что l_M - ненулевое подпространство в $X^{\mathbb{N}}$, а функционал $I_M : l_M \rightarrow [0, \infty]$ является генфункцией. Следовательно, равенство

$$\|\varphi\|_M := \inf\{a > 0 : I_M(a^{-1}\varphi) \leq a\}$$

определяет квазинорму в l_M .

Т е о р е м а 5. Если КНП l_M правильно, то

$$\forall(n, x \neq 0) \lim_{\alpha \rightarrow \infty} M(n, \alpha x) = \infty \quad (8)$$

(если M не зависит от n , то (8) совпадает с (4)).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно Теореме 2

$$(\forall \varphi \in l_M \setminus \{\Theta\}) \lim_{\alpha \rightarrow \infty} I_M(\alpha \varphi) = \infty.$$

Возьмем $n_0 \in \mathbb{N}$ и $x_0 \neq 0$ и положим $\varphi(n_0) = x_0$, а $(\forall n \neq n_0)\varphi(n) = 0$. Тогда $\varphi \in l_M \setminus \{\Theta\}$, откуда $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} M(n_0, \alpha x_0) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} I_M(\alpha \varphi) = \infty$. $\square$

Приведем примеры генфункций, показывающие, что условие (8) не достаточно, вообще говоря, для правильности КНП l_M (даже если $(\forall n)M(n, \cdot)$ является простейшей генфункцией).

П р и м е р 2. Пусть $X = \mathbb{R}$, $M(n, x) = \sqrt[n]{x}$, так что $(\forall n)M(n, \cdot)$ - простейшая генфункция, обладающая свойством (8).

Пусть $(\forall k)\varphi_k(k) = 1$, а $(\forall n \neq k)\varphi_k(n) = 0$. Тогда $(\forall k)I_M(\varphi_k) = 1$, так что $\|\varphi_k\|_M = 1$. В то же время $I_M(k^{-1}\varphi_k) = \sqrt[k]{k^{-1}} \rightarrow 1$. Это значит, что сфера $\{\varphi \in l_M : \|\varphi\|_M = 1\}$ не ТВ-ограничена, так что КНП l_M не правильно.

Пример 3. Пусть $X = \mathbb{R}$, $M(0) = 0$, $M(x) = -(\ln|x|)^{-1}$ при $|x| \in (0, 1)$ и $M(x) = \infty$ при $|x| \geq 1$, так что для простейшей генфункции M выполняется (4) и, следовательно, (8).

Пусть $(\forall k) \varphi_k(n) = e^{-k}$ при $n \leq k$ и $\varphi_k(n) = 0$ при $n > k$. Тогда $(\forall k) I_M(\varphi_k) = 1$, так что $\|\varphi_k\|_M = 1$. Кроме того, $(\forall k) I_M(e^{-k} \varphi_k) = 1/2$. Отсюда следует, как и в Примере 2, что КНП l_M не правильно.

Из этих примеров также следует, что условие (4), вообще говоря, не достаточно для правильности КНП X_M . Действительно, пусть роли пространства X и генфункции $M : X \rightarrow [0, \infty]$ играют l_M и, соответственно, I_M . Так как в Примерах 2 и 3 $(\forall \varphi \neq \Theta) I_M(\alpha \varphi) \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow \infty$, то условие (4) (с заменой x на φ , а M на I_M) выполняется. В то же время КНП l_M в обоих случаях не правильно.

Заметим далее, что если $(\forall n)$ генфункция $M(n, \cdot)$ p -однородна на $X(p > 0)$ или выпукла на X , то таким же свойством обладает I_M на l_M . Следовательно, в этих ситуациях КНП l_M правильно.

Из Теоремы 4 вытекает следующий критерий правильности КНП l_M .

Пространство l_M правильно тогда и только тогда, когда $I_M(\lambda \varphi) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ равномерно по φ на каждом шаре $\mathcal{B}_r := \{\varphi \in l_M : \|\varphi\|_M < r\}$.

Применим этот критерий в следующей ситуации.

Теорема 6. Пусть X - нормированное пространство, и M - простейшая генфункция, т.е. $M(x) = \Phi(|x|)$ (см. §2). Тогда если $\Phi(\xi) \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \infty$ и $c := \sup\{\xi : \Phi(\xi) = 0\} > 0$, то КНП l_M правильно.

Доказательство. Зафиксируем $r > 0$. Если $\varphi \in \mathcal{B}_r$, то

$$I_M(r^{-1} \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(r^{-1} |\varphi(n)|) \leq r,$$

так что

$$(\forall n) \Phi(r^{-1} |\varphi(n)|) \leq r.$$

Далее, так как $\Phi(\xi) \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \infty$, то $b := \sup\{\xi : \Phi(\xi) \leq r\} < \infty$. Следовательно, $(\forall n) |\varphi(n)| \leq br$. Кроме того, $\Phi(|\lambda| br) = 0$ при $|\lambda| < d := c(br)^{-1}$.

Следовательно, $(\forall \varphi \in \mathcal{B}_r) I_M(\lambda \varphi) = 0$ при $|\lambda| < d$. Таким образом, $I_M(\lambda \varphi) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ равномерно по $\varphi \in \mathcal{B}_r$. Значит, КНП l_M правильно. $\square$

Замечание 1. Было бы полезно найти критерий правильности пространства l_M в терминах самой генфункции M .

В заключение отметим, что в настоящей статье не рассмотрены условия правильности функциональных КНП L_M (см. [1] и [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шрагин И.В. Об ограниченности множеств в пространствах Муселяка-Орлича // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естеств. и техн. науки. 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1227–1228.
2. Shragin I.V. On the boundedness of sets in Musielak–Orlicz spaces // Comment. Math. 2013. V. 53. N 2. P. 405–412.
3. Musielak J. Orlicz spaces and modular spaces. Berlin: Springer, 1983.
4. Иосада К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
5. Kolmogoroff A. Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes // Stud. Math. 1934. T.S. P. 29–33.
6. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию 3 марта 2015 г.

Shragin I.V. RIGHTNESS CONDITIONS OF QUSINORMED SPACES

We consider the quasinormed spaces, which are defined with the help of gen-functions. For these spaces we establish the necessary and sufficient conditions of rightness, that is of equivalence of two notions of set boundedness: in the sense of metric and in the sense of topology of vector space.

Key words: bounded set; right quasinormed space; gen-function; Musielak–Orlicz space.

Шрагин Исаак Вениаминович, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: is.shragin@mail.ru

Shragin Isaak Veniaminovich, Perm state national research university, Russian Federation, Perm, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, e-mail: is.shragin@mail.ru