

УДК 517.977.8

О ВЗАИМОСВЯЗИ ДВУХ ЗАДАЧ УКЛОНЕНИЯ СО МНОГИМИ УБЕГАЮЩИМИ

© Н.Н. Петров, К.А. Щелчков

Ключевые слова: дифференциальная игра; групповое преследование; преследователь; убегающий; цена игры.

Рассматривается задача конфликтного взаимодействия группы преследователей и группы убегающих при условии, что среди преследователей имеются как участники, возможности которых не уступают возможностям убегающих, так и участники с меньшими возможностями. Доказано, что если в игре с равными возможностями преследователей и убегающих происходит уклонение от встречи хотя бы одного убегающего на бесконечном промежутке времени, то при добавлении преследователей с меньшими возможностями уклонение хотя бы одного убегающего происходит на любом конечном отрезке времени.

В пространстве R^k ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $[1, 2] \Gamma n + m$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и m убегающих $E_1, \dots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A(t)x_i + u_i, \quad u_i \in V, \quad i = 1, \dots, l, \quad \dot{x}_i = A_i(t)x_i + u_i, \quad u_i \in U_i, \quad i = l+1, \dots, n, \\ \dot{y}_j &= A(t)y_j + v_j, \quad v_j \in V, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad y_j(t_0) = y_j^0, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

где $x_i, y_j \in R^k$ — фазовые переменные, $u_i, v_j \in R^k$ — управляющие воздействия игроков, $A(t), A_{l+1}(t), \dots, A_n(t)$ — непрерывные на $[t_0, \infty)$ матричные функции, $V, U_{l+1}, \dots, U_n$ — выпуклые компакты, причем для всех $t \geq t_0$, для всех $z \in R^k$ и для всех $i = l+1, \dots, n$ выполнено включение

$$A_i(t)z + U_i \subset A(t)z + \text{Int}V,$$

где $\text{Int}V$ — внутренность множества V .

Обозначим $Z_0^s = (x_1^0, \dots, x_s^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$, где s — натуральное число.

Под разбиением σ промежутка $[t_0, \infty)$ будем понимать последовательность $\{\tau_q\}_{q=0}^\infty$, не имеющую конечных точек сгущения и такую, что $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_q < \dots$. Под разбиением σ отрезка $[t_0, T]$ будем понимать совокупность попарно различных чисел $\{t_0, T, \tau_q \in (t_0, T), q = \overline{1, r}\}$, занумерованных в порядке возрастания.

О п р е д е л е н и е 1. *Кусочно-программной стратегией* Q_p убегающего E_p , заданной на $[t_0, \infty)$ ($[t_0, T]$) называется пара (σ, Q_σ^j) , где σ — разбиение промежутка $[t_0, \infty)$ ($[t_0, T]$), а Q_σ^p — семейство отображений $c_p^r, r = 0, 1, \dots$, ставящих в соответствие величинам

$$\left(t_r, x_i(t_r), y_j(t_r), \min_{t \in [t_0, t_r]} \min_i \|x_i(t) - y_j(t)\| \right)$$

измеримую функцию v_p^r , определенную на $[t_r, t_{r+1})$ и такую, что $v_p^r(t) \in V$ для всех $t \in [t_r, t_{r+1})$.

Аналогично определяются кусочно-программные стратегии S_i преследователей P_i .

Игру, в которой участвуют преследователи $P_1, \dots, P_l$ и убегающие $E_1, \dots, E_m$, обозначим через $\Gamma(l, m, Z_0^l)$, а в которой участвуют преследователи $P_1, \dots, P_n$ и убегающие $E_1, \dots, E_m$, через $\Gamma(n, m, Z_0^n)$.

О п р е д е л е н и е 2. В игре $\Gamma(l, m, Z_0^l)$ происходит *уклонение* от встречи на $[t_0, \infty)$ ($[t_0, T]$), если существуют кусочно-программные стратегии $Q_1, \dots, Q_m$ убегающих $E_1, \dots, E_m$ такие, что для любых траекторий $x_1(t), \dots, x_l(t)$ преследователей $P_1, \dots, P_l$ найдется номер s , что $y_s(t) \neq x_i(t)$ для всех i и всех $t \in [t_0, \infty)$ ($[t_0, T]$).

Пусть $T > t_0$. Рассмотрим вспомогательную антагонистическую игру $\Gamma(l, m, T, Z_0^l)$ между нарядом преследователей $P_1, \dots, P_l$ и нарядом убегающих $E_1, \dots, E_m$ в классе кусочно-программных стратегий с функцией выигрыша преследователей

$$H(S_1, \dots, S_l, Q_1, \dots, Q_m) = \sum_{j=1}^m \min_{t \in [t_0, T]} \min_i \|x_i(t) - y_j(t)\|.$$

О п р е д е л е н и е 3. Ситуация $(S_1, \dots, S_l, Q_1, \dots, Q_m)$ называется *ситуацией равновесия* в игре $\Gamma(l, m, T, Z_0^l)$, если для любых кусочно-программных стратегий $U_1, \dots, U_l$ преследователей $P_1, \dots, P_l$ и для любых кусочно-программных стратегий $V_1, \dots, V_m$ убегающих $E_1, \dots, E_m$ справедливо неравенство

$$H(S_1, \dots, S_l, V_1, \dots, V_m) \leq H(S_1, \dots, S_l, Q_1, \dots, Q_m) \leq H(U_1, \dots, U_l, Q_1, \dots, Q_m).$$

Л е м м а. Пусть в игре $\Gamma(l, m, Z_0^l)$ происходит уклонение от встречи на $[t_0, \infty)$. Тогда для любого $T > t_0$ существуют $\delta(T) > 0$, разбиение σ отрезка $[t_0, T]$, кусочно-программные стратегии $Q_1, \dots, Q_m$ убегающих $E_1, \dots, E_m$ такие, что для любого $Z = (x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_m)$, удовлетворяющего неравенствам $\|x_i - x_i^0\| < \delta(T)$, $\|y_j - y_j^0\| < \delta(T)$, в игре $\Gamma(l, m, T, Z)$ справедливо неравенство

$$\inf_{U_1, \dots, U_l} H(U_1, \dots, U_l, Q_1, \dots, Q_m) > 0.$$

Справедливость леммы следует из существования ситуации равновесия и цены игры в игре $\Gamma(l, m, Z_0^l)$ и непрерывной зависимости цены игры от начальных позиций.

Т е о р е м а 1. Пусть в игре $\Gamma(l, m, Z_0^l)$ происходит уклонение от встречи на $[t_0, \infty)$. Тогда в игре $\Gamma(n, m, Z_0^n)$ происходит уклонение от встречи на любом отрезке $[t_0, T]$.

Доказательство проводится построением стратегии уклонения для убегающих, используя результаты работы ([2]).

Определим **функцию** [3] $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} f(n) &= \min\{m \mid \text{в игре } \Gamma(n, m, z^0) \text{ происходит уклонение от встречи для любого } z^0\} = \\ &= \min\{m \mid \text{в игре } \Gamma(n, m) \text{ разрешима глобальная задача уклонения}\}. \end{aligned}$$

Т е о р е м а 2. Пусть в игре $\Gamma(l, m, Z_0^l)$ выполнено неравенство $m \geq f(l)$. Тогда для любого $n > l$ в игре $\Gamma(n, m, Z_0^n)$ происходит уклонение от встречи на любом отрезке $[t_0, T]$ из любых начальных позиций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртск. ун-та, 2009.
2. Зак В.Л. Задача уклонения от многих преследователей при наличии фазового ограничения // ДАН СССР. Москва, 1982. Т. 265. № 5. С. 1051-1053.
3. Петров Н.Н., Петров Н.Никандр. О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1366-1374.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №14-01-31176) и Минобрнауки России в рамках базовой части (проект 2003).

Поступила в редакцию 9 июня 2015 г.

Petrov N.N., Shchelchikov K.A. ON CORRELATION OF TWO EVASION PROBLEMS WITH MANY EVADERS

There is considered the problem of conflict interaction of pursuers' and evaders' groups, provided that among the pursuers there are participants whose capabilities are not inferior to the opportunities of evaders as well as participants with fewer opportunities. It is proved that if in the game with equal opportunities for pursuers and evaders evasion of at least one evader on an infinite interval of time occurs, then with the addition of pursuers with fewer opportunities, the evasion of at least one evader is happening on any finite time interval.

Key words: differential game; group pursuit; pursuer; evader; the price of game.

Петров Николай Никандрович, Удмуртский государственный университет, г. Ижевск, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, e-mail: kma3@list.ru

Petrov Nikolai Nikandrovich, Udmurt State University, Izhevsk, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, the Head of the Differential Equations Department, e-mail: kma3@list.ru

Щелчков Кирилл Александрович, Удмуртский государственный университет, г. Ижевск, Российская Федерация, магистрант, e-mail: incognitobox@mail.ru

Shchelchikov Kirill Aleksandrovich, Udmurt State University, Izhevsk, the Russian Federation, Master's degree Student, e-mail: incognitobox@mail.ru

УДК 517.98

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ О СЛАБОЙ ЗАМКНУТОСТИ СУПЕРПОЗИЦИОННОГО МУЛЬТИОПЕРАТОРА

© Г.Г. Петросян

Ключевые слова: мультиоператор; слабая сходимости; измеримое сечение; компактное множество.

В работе доказывается теорема о слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора для мультифункции соответствующей многозначному отображению, которое подчиняется условиям типа верхних условий Каратеодори. Данная теорема является обобщением Теоремы 1.5.30 из [1].

Пусть E — банахово пространство и имеется разбиение отрезка $[0, T]$ точками $0 < t_1 < \dots < t_m < T$, $m \geq 1$. Обозначим через $Kv(E)$ и $Cv(E)$ совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств E и совокупность всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств E соответственно. Обозначим также символом $\mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$ пространство функций $z : [0, T] \rightarrow E$, непрерывных вместе со своими производными $z', z'', \dots, z^{(N-1)}$ (при $N = 1$ просто непрерывных) на $[0, T] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$ и таких, что левые и правые пределы $z^{(j)}(t_k^-)$ и $z^{(j)}(t_k^+)$, $0 \leq j \leq N-1$, $1 \leq k \leq m$, существуют и $z^{(j)}(t_k^-) = z^{(j)}(t_k)$. При $N = 1$, пространство $\mathcal{PC}^0([0, T]; E)$ будем обозначать просто $\mathcal{PC}([0, T]; E)$.

Нетрудно видеть, что пространство $\mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$, снабженное нормой

$$\|z\|_{\mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)} = \|z\| + \|z'\| + \dots + \|z^{(N-1)}\|,$$