УДК 517.929

О ТОЧНОСТИ ГРАНИЦ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© Т.Л. Сабатулина

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение; распределённое запаздывание; функция Коши; устойчивость; положительность функции Коши.

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение с распределённым запаздыванием. Приведено несколько точных эффективных признаков устойчивости и положительности функции Коши этого уравнения. Проведено сравнение областей применимости данных признаков.

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, L_1 — пространство суммируемых на $\mathbb{R}_+$ функций, $\Delta = \bigl\{(t, s) \in {\mathbb{R}_+}^2 \colon t \geqslant s\bigr\}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с распределённым переменным запаздыванием

$$\dot{x}(t) + \int_{t-h(t)}^{t} k(t, s)x(s)\,ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $k\colon \Delta \to \mathbb{R}_+$, $h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, функции $k(t, \cdot)$ и f локально суммируемы, функции $k(\cdot, s)$, h измеримы, функция $\rho(t) = \int_{t-h(t)}^{t} k(t, s)\,ds$ локально суммируема. Решение уравнения (1) принято считать [1, с. 9] принадлежащим классу абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке функций. Здесь и далее будем считать, что при отрицательных значениях аргумента функция x равна нулю. В дальнейшем, если пределы интегрирования становятся отрицательными в некоторых точках, то подынтегральную функцию будем полагать равной нулю при отрицательных значениях аргумента.

Как известно [1, с. 84, теорема 1.1], решение уравнения (1) при любом заданном начальном условии $x(0)$ и любой правой части f существует, единственно и представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_{0}^{t} C(t, s)f(s)\,ds. \tag{2}$$

Функцию $C(t, s)$ называют *функцией Коши* уравнения (1), а $X(t) = C(t, 0)$ — *фундаментальным решением* уравнения (1).

О п р е д е л е н и е 1 [1, с. 89–90]. Уравнение (1) *равномерно устойчиво*, если при некотором положительном N для всех t и почти всех s таких, что $(t, s) \in \Delta$, справедлива оценка

$$|C(t, s)| \leqslant N.$$

О п р е д е л е н и е 2 [1, с. 89–90]. Уравнение (1) *экспоненциально устойчиво*, если при некоторых положительных N и γ для всех t и почти всех s таких, что $(t, s) \in \Delta$, справедлива оценка

$$|C(t, s)| \leqslant Ne^{-\gamma(t-s)}.$$

Кроме того, формула (2) позволяет свести вопросы о знакоопределённости и монотонности решения к вопросу о положительности функции Коши уравнения (1).

Исследование начнём с автономных уравнений, поскольку для них возможно получение необходимых и достаточных признаков усойчивости и знакоопределённости решений.

1. Автономные уравнения

Автономным назовём частный случай уравнения (1) следующего вида:

$$\dot{x}(t) + \int_{t-h}^{t} k(t-s)x(s)\,ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Автономные уравнения хороши тем, что для них возможно получение необходимых и достаточных признаков устойчивости и знакоопределённости решений.

Для автономного уравнения имеет место связь:

$$X(t-s) = C(t,s).$$

Поэтому для уравнения (3) фундаментальное решение X естественно сделать основным объектом изучения. В свою очередь, исследуемые в данной работе свойства фундаментального решения X определяются расположением на комплексной плоскости нулей характеристической функции:

$$g(p) = p + \int_0^h k(\xi)e^{-p\xi}\,d\xi.$$

Отметим [2, 3] несколько важных свойств характеристической функции. Функция g является аналитической функцией на всей комплексной плоскости. Все нули характеристической функции отделены друг от друга. В любой полуплоскости $\mathrm{Re}\,p \geqslant \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, количество нулей функции g конечно. Кроме того, справедливы следующие критерии устойчивости уравнения (3).

- Для того чтобы уравнение (3) было экспоненциально устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все нули характеристической функции g лежали слева от мнимой оси.
- Для того чтобы уравнение (3) было равномерно устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы характеристическая функция g не имела нулей справа от мнимой оси, а все её нули, лежащие на мнимой оси, были простыми.

Чтобы получить признаки в терминах параметров исходного уравнения, необходимо конкретизировать вид функции k. В качестве примера рассмотрим степенную функцию.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $k(\xi) = k\xi^n$, $k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

- *Уравнение* (3) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда*

$$0 < kh^{n+2} < k_0 = \frac{\xi_0^{n+2}}{\int_0^{\xi_0} s^n \sin s\,ds},$$

где ξ_0 *— наименьший положительный корень уравнения*

$$\int_0^{\xi} s^n \cos s\,ds = 0. \tag{4}$$

- *Уравнение* (3) *равномерно устойчиво тогда и только тогда, когда*

$$0 \leqslant kh^{n+2} \leqslant k_0 = \frac{\xi_0^{n+2}}{\int_0^{\xi_0} s^n \sin s\,ds},$$

где ξ_0 *— наименьший положительный корень уравнения* (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственной проверкой убеждаемся, что только при $kh^{n+2} \in (0, k_0)$ все нули функции g лежат слева от мнимой оси, а при $kh^{n+2} = 0$ и $kh^{n+2} = k_0$ справа от мнимой оси нулей функции g нет, на самой мнимой оси находятся только простые нули. Теорема доказана.

Заметим, что $\xi_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Сформулируем несколько простых следствий из теоремы 1.

С л е д с т в и е 1 [4]. *Пусть* $k(\xi) \equiv k$, $k \in \mathbb{R}$.

- *Уравнение* (3) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда*

$$0 < kh^2 < \frac{\pi^2}{2}.$$

- *Уравнение* (3) *равномерно устойчиво тогда и только тогда, когда*

$$0 \leqslant kh^2 \leqslant \frac{\pi^2}{2}.$$

С л е д с т в и е 2. *Пусть* $k(\xi) = k\xi$, $k \in \mathbb{R}$.

- *Уравнение* (3) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда*

$$0 < kh^3 < k_0 = \xi_0^2,$$

  где ξ_0 *— наименьший положительный корень уравнения*

$$\xi = \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}. \tag{5}$$

- *Уравнение* (3) *равномерно устойчиво тогда и только тогда, когда*

$$0 \leqslant kh^3 \leqslant k_0 = \xi_0^2,$$

  где ξ_0 *— наименьший положительный корень уравнения* (5).

В следствии 2 $\xi_0 \approx 2.33112$, а $k_0 \approx 5.43413$.

С л е д с т в и е 3. *Пусть* $k(\xi) = k\xi^2$, $k \in \mathbb{R}$.

- *Уравнение* (3) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда*

$$0 < kh^4 < k_0 = \frac{\xi_0^4}{2\left(\frac{\xi_0}{\sin\xi_0 - 1} - 1\right)},$$

  где ξ_0 *— наименьший положительный корень уравнения*

$$\xi^2 = 2 - 2\xi \operatorname{ctg} \xi. \tag{6}$$

- *Уравнение* (3) *равномерно устойчиво тогда и только тогда, когда*

$$0 \leqslant kh^4 \leqslant k_0 = \frac{\xi_0^4}{2\left(\frac{\xi_0}{\sin\xi_0 - 1} - 1\right)},$$

  где ξ_0 *— наименьший положительный корень уравнения* (6).

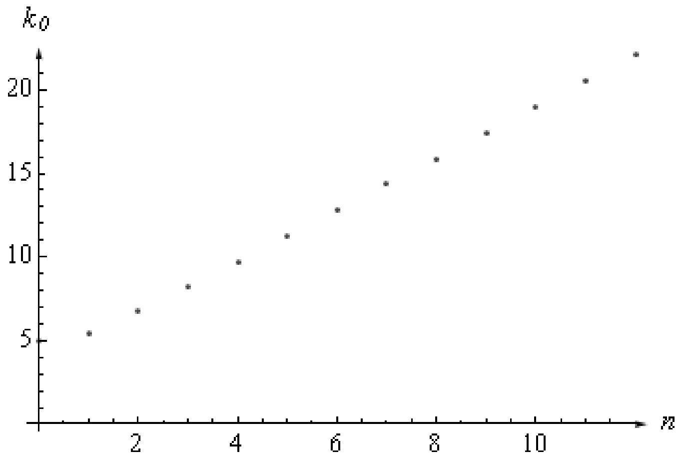

Рис. 1: Значение k_0 при $n = \overline{0,12}$.

В следствии 3 $\xi_0 \approx 2.08158$, а $k_0 \approx 6.77227$.

При больших n значения ξ_0 и k_0 легко вычислить с любой степенью точности. Например, на рис. 1 отмечены значения k_0 при различных значениях n.

Используя работу [3], получаем следующий результат.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $k(\xi) = k\xi^n$, $k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. *Фундаментальное решение уравнения* (3) *положительно тогда и только тогда, когда*

$$kh^{n+2} \leqslant k^* = (n+2)\xi_0 e^{-\xi_0},$$

где ξ_0 *— положительный корень уравнения*

$$(n+2)\int_0^\xi s^n e^s\,ds = \xi^{n+1}e^\xi.$$

С л е д с т в и е 4 [5]. *Пусть* $k(\xi) \equiv k$, $k \in \mathbb{R}$. *Фундаментальное решение уравнения* (3) *положительно тогда и только тогда, когда*

$$kh^2 \leqslant k^* = \xi_0(2-\xi_0),$$

где ξ_0 *— положительный корень уравнения*

$$e^{-\xi} = 1 - \frac{\xi}{2}. \tag{7}$$

В работе [5] найдены приближенные значения для корня последнего уравнения: $\xi_0 \approx 1.59$, которому соответствует $kh^2 \leqslant 0.65$.

С л е д с т в и е 5. *Пусть* $k(\xi) = k\xi$, $k \in \mathbb{R}$. *Фундаментальное решение уравнения* (3) *положительно тогда и только тогда, когда*

$$kh^3 \leqslant k^* = 3\xi_0 e^{-\xi_0},$$

где ξ_0 *— положительный корень уравнения*

$$e^{-\xi} = 1 - \xi + \frac{\xi^2}{3}.$$

В следствии 5 $\xi_0 \approx 1.36078$, а $k^* \approx 1.04696$.

С л е д с т в и е 6. *Пусть* $k(\xi) = k\xi^2$, $k \in \mathbb{R}$. *Фундаментальное решение уравнения* (3) *положительно тогда и только тогда, когда*

$$kh^4 \leqslant k^* = 4\xi_0 e^{-\xi_0},$$

где ξ_0 *— положительный корень уравнения*

$$e^{-\xi} = 1 - \xi + \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{8}.$$

В следствии 6 $\xi_0 \approx 1.26191$, а $k^* \approx 1.42905$.

При больших n значение ξ_0 и k^* легко вычислить с любой заданной точностью. Например, на рис. 2 отмечены значения k^* при различных значениях n.

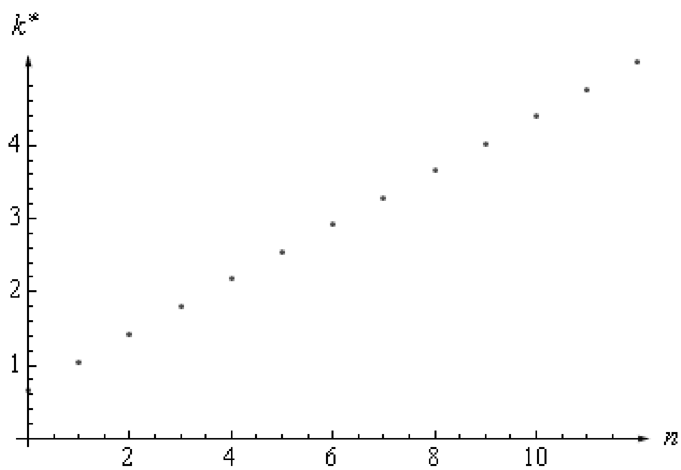

Рис. 2: Значение k^* при $n = \overline{0, 12}$.

2. Неавтономные уравнения

Для неавтономных уравнений построение необходимых и достаточных признаков устойчивости и знакоопределённости решений, по-видимому, невозможно. Поэтому получают достаточные признаки, среди которых выделяются точные признаки устойчивости. Ниже приводятся только такие признаки.

Будем подчинять параметры уравнения (1) различным ограничениям и следить, как меняются области устойчивости и знакоопределённости решения.

Пусть ядро $k(t, s)$ будет постоянным, а запаздывание h переменным. В этом случае справедлива

Т е о р е м а 3 [6]. *Пусть* $k(t, s) \equiv k \geqslant 0$. *Тогда*

- *если* $0 < \sqrt{k} \varliminf_{t \to \infty} h(t) \leqslant \sqrt{k} \varlimsup_{t \to \infty} h(t) < 2$, *то уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво;*
- *если* $0 \leqslant \sqrt{k} \sup_t h(t) \leqslant 2$, *то уравнение* (1) *равномерно устойчиво.*

В работе [6] показывается, что константу 2 в теореме 3 нельзя увеличить (см. пример 4), а точную вехнюю грань заменить верхним пределом.

П р и м е р 1. Пусть $k(t,s) \equiv 1$,

$$h(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t \in [0,\omega), \\ \omega, \text{ если } t \in \left[\omega, \omega + \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Понятно, что $x\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \omega$. Продолжим процесс периодически. Тогда при $\omega > 2$ исследуемое уравнение не будет равномерно устойчивым, а при $\omega \geqslant 2$ — не будет экспоненциально устойчивым.

П р и м е р 2. Пусть $k(t,s) \equiv 1$,

$$h(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t \in \left[n\left(\omega + \dfrac{\pi}{2}\right), n\left(\omega + \dfrac{\pi}{2}\right) + \omega\right), \\ \omega, \text{ если } t \in \left[n\left(\omega + \dfrac{\pi}{2}\right) + \omega, (n+1)\left(\omega + \dfrac{\pi}{2}\right)\right), \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$. Несложно вычислить, что $x\left((n+1)\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-1)^n(n+1)$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|x\left((n+1)\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right)\right| = +\infty$. С другой стороны, $\sqrt{k}\,\varliminf\limits_{t\to\infty} h(t) = 2$, но $\sqrt{k}\sup\limits_t h(t) > 2.$

В работе [6] также предложено обобщение теоремы 3 для вырожденного ядра: $k(t,s) = a(t)a(s)$. Заметим, что случай $a \in L_1$ потребовалось рассмотреть отдельно.

Т е о р е м а 4 [6]. *Пусть* $k(t,s) = a(t)a(s)$, $a \in L_1$. *Тогда:*

а) $|C(t,s)| < N$, *то есть уравнение* (1) *равномерно устойчиво;*

б) для любого $\varepsilon > 0$ *найдётся* $\theta > 0$ *такое, что при всех* $t,s\colon \theta \leqslant s \leqslant t$ *справедливо неравенство* $|C(t,s) - 1| \leqslant \varepsilon$*;*

в) при любом фиксированном s *существует* $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t,s)$.

Т е о р е м а 5 [6]. *Пусть* $k(t,s) = a(t)a(s)$, $a(t) > 0$, $a \notin L_1$. *Тогда*

- *если* $0 < \varliminf\limits_{t\to\infty} \int_{t-h(t)}^t a(s)\,ds \leqslant \varlimsup\limits_{t\to\infty} \int_{t-h(t)}^t a(s)\,ds < 2$, *то найдутся такие* $M, \gamma > 0$, *что функция Коши уравнения* (1) *при всех* $(t,s) \in \Delta$ *имеет оценку* $|C(t,s)| \leqslant \leqslant Me^{-\gamma\int_s^t a(\xi)\,d\xi}$*;*
- *если* $0 \leqslant \sup\limits_t \int_{t-h(t)}^t a(s)\,ds \leqslant 2$, *то уравнение* (1) *равномерно устойчиво.*

Легко видеть, что теорема 5 следует из теоремы 3, если сделать замену переменных: $\tau = \int_0^t a(s)\,ds$.

Ослабим требования на параметры уравнения (1): пусть они будут ограниченными.

Т е о р е м а 6. *Пусть* $\sup\limits_{t,s} k(t,s) = k$, $\sup\limits_t h(t) = h$. *Если* $\rho \notin L_1$ *и* $0 < \sqrt{k}h < h_0$, *где* h_0 *— наименьший положительный корень уравнения*

$$\frac{h\left(h - 2\arcsin\frac{1}{h}\right)}{2} - h^2\sqrt{1 - \frac{1}{h^2}} + 1 = -1,$$

то уравнение (1) *асимптотически устойчиво.*

С помощью численных методов получаем: $h_0 \approx 1.72295$, то есть $0 < kh^2 < 2.96856$.

Покажем, что данный признак, как и приведённые ранее, является точным.

П р и м е р 3. Пусть $h(t) = 0$ при $t \in [0,h)$, $h(t) = h$ при $t \in [h,t_0]$,

$$k(t,s) = \begin{cases} 1, \text{ при } s \in [0,t_0), \\ 0, \text{ при } s \in [t_0,t]. \end{cases}$$

Легко получить, что $h\sin(t_0 - h) = 1$, где t_0 — первый нуль решения такого уравнения. Далее сравниваем значение решения x в точке первого минимума, то есть $x(t_0+h)$, с -1. Из соотношения $x(t_0+h) = -1$ получаем границу области асимптотической устойчивости.

Следующий результат содержит точный достаточный признак знакоопределённости решений.

Т е о р е м а 7 [7]. *Пусть* $\sup_{t,s} k(t,s) = k$, $\sup_t h(t) = h$. *Тогда функция Коши уравнения* (1) *положительна, если* $kh^2 \leqslant \xi_0(2-\xi_0)$, *где* ξ_0 *— положительный корень уравнения* (7).

Отметим важный факт: в отличие от признаков устойчивости для уравнения с ограниченными параметрами, данный признак становится необходимым и достаточным для автономного уравнения.

Наконец, для случая уравнения (1), параметры которого не предполагаются априори ограниченными, имеют место следующие результаты.

Т е о р е м а 8 [8]. *Пусть* $\rho \in L_1$. *Тогда:*

а) $\sup\limits_{(t,s)\in\Delta} |C(t,s)| < \infty$;

б) для любого $\varepsilon > 0$ *найдётся* $\theta > 0$ *такое, что при всех* $t, s\colon \theta \leqslant s \leqslant t$ *справедливо неравенство* $|C(t,s) - 1| \leqslant \varepsilon$;

в) при любом фиксированном s *существует* $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t,s)$.

Т е о р е м а 9 [9].

- *Если*
$$\varlimsup_{t\to\infty} \int_{t-h(t)}^{t} \rho(s)\,ds < \frac{3}{2}, \tag{8}$$
то найдутся такие $M, \gamma > 0$, *что функция Коши уравнения* (1) *при всех* $(t,s) \in \Delta$ *имеет оценку* $|C(t,s)| \leqslant Me^{-\gamma\int_s^t \rho(\xi)\,d\xi}$;

- *Если*
$$\sup_t \int_{t-h(t)}^{t} \rho(s)\,ds \leqslant \frac{3}{2}, \tag{9}$$
то уравнение (1) *равномерно устойчиво.*

С л е д с т в и е 7. *Если* $\rho \notin L_1$ *и выполнены условия теоремы 9, то уравнение* (1) *асимптотически устойчиво.*

В работах [10, 11] показано, что константа $\frac{3}{2}$ в теореме 9 является точной на классе уравнений с распределённым запаздыванием. Приведём данный пример.

П р и м е р 4. Пусть $m = 1$. При $t \in [0,2]$ положим $h(t) = 0$.

При $t \in \left[2, 2+\frac{3}{2}+\frac{1}{m}\right]$ положим $h(t) = t - 2 + \frac{1}{m}$, а

$$k(t,s) = \begin{cases} m, & \text{если } s \in \left[2-\dfrac{1}{m}, 2\right], \\ 0, & \text{если } s \in \left[0, 2-\dfrac{1}{m}\right) \cup (2,t]. \end{cases}$$

При $t \in \left[2+\frac{3}{2}+\frac{1}{m}, 2+\frac{3}{2}+\frac{1}{m}+1\right]$ положим $h(t) = \frac{3}{2}+\frac{1}{m}$,

$$k(t,s) = \begin{cases} m, & \text{если } s \in \left[t-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{m}, t-\dfrac{3}{2}\right], \\ 0, & \text{если } s \in \left[0, t-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{m}\right) \cup \left(t-\dfrac{3}{2}, t\right]. \end{cases}$$

Нетрудно вычислить $x(T_1)$, где $T_1 = 2 + \frac{3}{2} + 1 + 1$. Далее возьмём $m = 2$ и вычислим $x(T_2)$, где $T_2 = T_1 + 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 1$. Затем то же самое проделаем для $m = 3$, потом $m = 4$ и т.д. В итоге получаем, что $\lim\limits_{m\to+\infty} |x(T_m)| = +\infty$. С другой стороны, $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \int_{t-h(t)}^{t} \rho(s)\,ds = \frac{3}{2}$. Следовательно, строгое неравенство в (8) нельзя заменить нестрогим. Этот же пример показывает, что в неравенстве (9) нельзя заменить точную верхнюю грань верхним пределом без потери равномерной устойчивости, а константу $\frac{3}{2}$ нельзя увеличить.

Наконец, сформулируем результат о положительности функции Коши уравнеия (1).

Т е о р е м а 10 [8]. *Функция Коши уравнения* (1) *положительна, если*

$$\sup_t \int_{t-h(t)}^{t} \rho(s)\,ds \leqslant \frac{1}{e}.$$

Константу $\frac{1}{e}$ в теореме 10 нельзя увеличить, что показывает пример, приведённый в работе [8]. Опишем его на идейном уровне.

П р и м е р 5 [8]. Пусть в уравнении (1) $k(t,s) = kn$, $h(t) = 1 + \frac{1}{n}$, $x(0) = 1$, $k \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$. При достаточно больших n решение такого уравнения становится сколь угодно близким уравнению $\dot{x}(t) + kx(t-1) = 0$. Но для автономных уравнений с сосредоточенным запаздыванием условие $k \leqslant \frac{1}{e}$ является необходимым и достаточным для знакопостоянности решений. Поэтому, если $k > \frac{1}{e}$, можно подобрать такое n, что решение уравнения с распределённым запаздыванием будет менять знак.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

2. *Зубов В.И.* К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Математика. 1958. № 6. С. 86-95.

3. *Sabatulina T., Malygina V.* On positiveness of the fundamental solution for a linear autonomous differential equation with distributed delay // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2014. № 61. P. 1-16.

4. *de Oliveira J.C.F., Carvalho L.A.V.* A Lyapunov functional for a retarded differential equation // SIAM. J. Math. Anal. 1985. № 16. P. 1295-1305.

5. *Малыгина В.В.* О положительности функции Коши линейного уравнения с распределённым запаздыванием // Вестник ПГТУ. 2006. № 2. С. 80-84.

6. *Малыгина В.В.* О точных границах области устойчивости линейных дифференциальных уравнений с распределённым запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2007. № 8. С. 19-28.

7. *Sabatulina T.L.* On the positiveness of the Cauchy function of integro–differential equations with bounded aftereffect // Functional differential equation. 2008. № 3–4. P. 273-282.

8. *Сабатулина Т.Л.* Признаки положительности функции Коши дифференциального уравнения с распределённым запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2010. № 11. С. 50-62.

9. *Малыгина В.В.* Некоторые признаки устойчивости функционально-дифференциальных уравнений, разрешённых относительно производной // Изв. вузов. Математика. 1992. № 7. С. 46-53.

10. *Сабатулина Т.Л.* Об устойчивости обобщённого уравнения Хатчинсона с распределённым переменным запаздыванием // Вестник ПГТУ. Механика. 2009. № 1. С. 46-56.

11. *Сабатулина Т.Л., Малыгина В.В.* Об устойчивости линейного дифференциального уравнения с ограниченным последействием // Изв. вузов. Математика. 2014. № 4. С. 25-41.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (задание № 2014/152, проект № 1890) и при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 13-01-96050 р урал а).

Поступила в редакцию 9 июня 2015 г.

Sabatulina T.L. ON EXACTNESS OF THE BOUNDARIES OF THE STABILITY DOMAIN FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISTRIBUTED DELAY

The linear differential equation with distributed delay is considered. Some exact effective conditions of stability and positivity of the Cauchy function for this equation are presented. The areas of applicability of the conditions are compared.

Key words: functional differential equation; distributed delay; Cauchy function; stability; positivity of the Cauchy function.

Сабатулина Татьяна Леонидовна, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник научно-исследовательского центра «Функционально-дифференциальные уравнения», e-mail: TSabatulina@gmail.com

Sabatulina Tatyana Leonidovna, Perm State National Research University, Perm, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of the Research Center «Functional-Differential Equations», e-mail: TSabatulina@gmail.com

УДК 517.958

О КЛАССИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© **А.Ю. Сазонов, Ю.Г. Фомичева**

Ключевые слова: оператор Бесселя; смешанная задача; гиперболическое и параболическое уравнения.

В работе найдены достаточные условия на границу области, коэффициенты оператора, правую часть и начальную функцию при которых ряд Фурье представляет классическое решение первой краевой задачи для гиперболического и параболического уравнения второго порядка, содержащего оператор Бесселя по нескольким пространственным переменным.

Пусть ${\mathbb{R}_+}^{n+m}$ — множество точек $x=(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=(x',y')$ действительного евклидова $(n+m)$-мерного пространства $\mathbb{R}^{n+m}$, удовлетворяющих условию $y_i>0$, $i=\overline{1,m}$; область $\Omega^+\subset{\mathbb{R}_+}^{n+m}$ и прилегает к гиперплоскостям $y_1=0,\ldots,y_m=0$; Γ^+ - часть границы Ω^+ расположенная в области $y_i>0$, $i=\overline{1,m}$.

В работе рассматривается задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-L_{y'}u=f(x,t), u(x,0)=\varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x), u|_{\Gamma^+}=0, \frac{\partial u}{\partial y_i}\Big|_{y_i=0}=0, i=\overline{1,m}, \qquad (1)$$

и аналогичная задача для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}-L_{y'}u=f(x,t), u(x,0)=\varphi(x), u|_{\Gamma^+}=0, \frac{\partial u}{\partial y_i}\Big|_{y_i=0}=0, i=\overline{1,m}, \qquad (2)$$

$$L_{y'}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)+\sum_{i=1}^{m}b_i(x')B_{y_i}+c(x), B_{y_i}=\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\frac{k_i}{y_i}\frac{\partial}{\partial y_i}, c(x)\leqslant 0, k_i>0.$$