УДК 62–50:519.7/8

ИНТЕРВАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОД ИХ РЕШЕНИЯ

© В.И. Левин

Ключевые слова: интервально-дифференциальное уравнение; интервальная производная; система; неопределенность.

Рассматривается обобщение обыкновенных дифференциальных уравнений на интервальный случай. Дается общее понятие интервально-дифференциального уравнения, его порядка, а также решения интервально-дифференциальных уравнений. Описан разработанный подход к решению интервально-дифференциальных уравнений. Доказывается, что любое интервально-дифференциальное уравнение можно свести к системе из двух обычных алгебраических уравнений. Приведен алгоритм решения уравнений.

1. ВВЕДЕНИЕ

В различных областях науки и техники очень часто встречаются задачи, для решения которых нужно решить одно уравнение или систему уравнений, содержащих производные искомых функций. Такие уравнения называются дифференциальными уравнениями. Теория и разнообразные методы решения таких уравнений разработаны весьма подробно [1]. При этом всегда предполагается, что все фигурирующие в уравнениях функции являются полностью определенными. Однако на практике задачи, сводящиеся к решению дифференциальных уравнений, весьма часто связаны с исследованием неполностью определенных систем. Поэтому в них могут возникать дифференциальные уравнения иного типа. Фигурирующие в них искомые функции являются неполностью определенными. Соответственно этому и производные искомых функций в дифференциальных уравнениях данного типа оказываются неполностью определенными. Настоящая работа является введением в изучение дифференциальных уравнений именно этого типа.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Будем использовать в качестве математического аппарата алгебру интервальных чисел [2], интервальный анализ [3] и интервально-дифференциальное исчисление [4].

В алгебре интервальных чисел операции совершаются над замкнутыми интервалами вещественных чисел, определяемыми в виде множеств

$$\tilde{a} \equiv [a_1, a_2] \equiv \{a \mid a_1 \le a \le a_2\} \qquad (1)$$

и рассматриваемыми как интервальные числа. Эти операции $\circ$ определяются как теоретико-множественные обобщения соответствующих операций над вещественными числами

$$\tilde{a} \circ \tilde{b} = \{a \circ b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}. \qquad (2)$$

Таким образом, алгебраические операции над интервалами – сложение, вычитание, умножение, деление – вводятся в виде

$$\begin{aligned} &\tilde{a} + \tilde{b} = \{a + b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\},\\ &\tilde{a} - \tilde{b} = \{a - b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\},\\ &k \cdot \tilde{a} = \{k \cdot a \mid a \in \tilde{a}\},\\ &\tilde{a} \cdot \tilde{b} = \{a \cdot b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\},\\ &\tilde{a} / \tilde{b} = \{a / b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Из определений (3) вытекают следующие формулы для вычисления результатов алгебраических операций над интервальными числами

$$\begin{aligned} &\tilde{a} + \tilde{b} \equiv [a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2],\\ &\tilde{a} - \tilde{b} \equiv [a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1],\\ &k \cdot \tilde{a} \equiv k \cdot [a_1, a_2] = \begin{cases} [ka_1, ka_2], & k > 0,\\ [ka_2, ka_1], & k < 0, \end{cases}\\ &\tilde{a} \cdot \tilde{b} \equiv [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [\min_{i,j}(a_i \cdot b_j), \max_{i,j}(a_i \cdot b_j)],\\ &\tilde{a} / \tilde{b} \equiv [a_1, a_2] / [b_1, b_2] = [a_1, a_2] \cdot [1/b_2, 1/b_1]. \end{aligned} \qquad (4)$$

Объектом изучения интервального анализа являются интервальные функции [3]. Интервальная функция вводится как однозначное отображение множества замкнутых вещественных интервалов $\{\tilde{x}\}$ вида (1), т. е. $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, на множество замкнутых вещественных интервалов $\{\tilde{y}\}$ того же вида $\tilde{y} = [y_1, y_2]$. Символически интервальная функция записывается в виде

$$\begin{aligned} &\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}), \text{ где } \tilde{x} = [x_1, x_2], \tilde{y} = [y_1, y_2],\\ &\tilde{f}(\tilde{x}) = [f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x})], \end{aligned} \qquad (5)$$

где $\tilde{x}$ называется интервальной независимой переменной (интервальным аргументом); $\tilde{y}$ – интервальной зависимой переменной; $\tilde{f}$ – интервальной функцией; $f_1(\cdot)$ – нижней граничной функцией интервальной функции $\tilde{f}$; $f_2(\cdot)$ – верхней граничной функцией интервальной функции $\tilde{f}$.

Базовым понятием интервального анализа является понятие предела интервальной функции, которое вводится таким образом. Независимая интервальная переменная $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ интервальной функции (5) по определению неограниченно приближается к некоторому интервалу $\tilde{x}_0=[x_{01},x_{02}]$, если в процессе этого изменения x_1 неограниченно приближается к x_{01}, а x_2 – к x_{02}. Символически это записывается так:

$$(\tilde{x}\to\tilde{x}_0)\equiv(x_1\to x_{01}, x_2\to x_{02}). \qquad (6)$$

Аналогично определяется неограниченное приближение зависимой интервальной переменной $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ функции (5) к интервалу $\tilde{y}_0=[y_{01},y_{02}]$:

$$(\tilde{y}\to\tilde{y}_0)\equiv(y_1\to y_{01}, y_2\to y_{02}). \qquad (7)$$

При этом если независимая переменная $\tilde{x}$ своим неограниченным приближением к интервалу $\tilde{x}_0$ вызывает неограниченное приближение зависимой переменной $\tilde{y}$ к интервалу $\tilde{y}_0$, мы говорим, что предел интервальной функции (5) при $\tilde{x}$, стремящемся к $\tilde{x}_0$, равен $\tilde{y}_0$, или символически

$$\lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0}\tilde{y}=\tilde{y}_0 \quad \text{или} \quad \lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0}\tilde{f}(\tilde{x})=\tilde{y}_0. \qquad (8)$$

Если интервальная функция (5) непрерывна, т. е. нижняя y_1 и верхняя y_2 границы зависимой переменной $\tilde{y}$ – непрерывные функции нижней x_1 и верхней x_2 границ независимой переменной $\tilde{x}$, то предел функции (5) равен значению функции в предельной точке $\tilde{x}_0$ аргумента $\tilde{x}$, или символически

$$\lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0}\tilde{f}(\tilde{x})=\tilde{f}(\tilde{x}_0). \qquad (9)$$

Основным математическим понятием, используемым в данной статье, является понятие интервальной производной функции [3–4]. Оно вводится следующим образом, на базе понятия обычной производной функции [1]. Рассмотрим произвольную интервальную функцию $\tilde{f}$ в виде (5). Будем считать ее непрерывной. Зафиксируем в ней значение независимой переменной $\tilde{x}=\tilde{x}_0=[x_{01},x_{02}]$. Этому значению, в силу непрерывности функции, соответствует фиксированное значение функции $\tilde{y}_0=\tilde{f}(\tilde{x}_0)$. Определим приращения независимой и зависимой переменных нашей функции относительно этих фиксированных значений

$$\Delta\tilde{x}=\tilde{x}-\tilde{x}_0, \quad \Delta\tilde{y}=\tilde{y}-\tilde{y}_0=\tilde{f}(\tilde{x})-\tilde{f}(\tilde{x}_0) \qquad (10)$$

и составим отношение второго приращения к первому

$$\begin{aligned}&\Delta\tilde{y}/\Delta\tilde{x}=(\tilde{y}-\tilde{y}_0)/(\tilde{x}-\tilde{x}_0)=\\&=(\tilde{f}(\tilde{x})-\tilde{f}(\tilde{x}_0))/(\tilde{x}-\tilde{x}_0).\end{aligned} \qquad (11)$$

Предел отношения (11) при неограниченном приближении независимой переменной $\tilde{x}$ к ее фиксированному предельному значению $\tilde{x}_0$, если он существует, называется интервальной производной функцией от исходной интервальной функции $\tilde{f}(\tilde{x})$ (5) в точке $\tilde{x}_0$ и обозначается $\tilde{y}'_{\tilde{x}_0}$ или $\tilde{f}'_{\tilde{x}_0}(\tilde{x})$:

$$\tilde{y}'_{\tilde{x}_0}=\tilde{f}'_{\tilde{x}_0}(\tilde{x})=\lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0}\Delta\tilde{y}/\Delta\tilde{x}, \qquad (12)$$

где $\Delta\tilde{x}$ и $\Delta\tilde{y}$ определяются формулами (10).

Доказано [3–4], что для существования в точке $\tilde{x}_0$ интервальной производной (12) от интервальной функции $\tilde{f}$ (5) необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности этой точки, включая ее саму, значения независимой переменной $\tilde{x}$ функции $\tilde{f}$ были невырожденными интервалами (т. е. интервалами с несовпадающими верхней и нижней границами). Но вырожденность интервала $\tilde{x}$ возможных значений независимой переменной интервальной функции означает его превращение в обычную детерминированную величину. Таким образом, интервальная производная (12) от интервальной функции $\tilde{f}$ (5) существует в любой точке $\tilde{x}_0$, в которой функция $\tilde{f}$ является существенно интервальной по независимой переменной $\tilde{x}$.

Как и в случае обычной производной [1], понятие интервальной производной (12) может быть обобщено путем повторного выполнения операции взятия производной. При этом интервальная производная $\tilde{y}'_{\tilde{x}}$ из формулы (12) становится производной 1-го порядка, производная от $\tilde{y}'_{\tilde{x}}$ – производной 2-го порядка $\tilde{y}''_{\tilde{x}}$, производная от $\tilde{y}''_{\tilde{x}}$ – производной 3-го порядка $\tilde{y}'''_{\tilde{x}}$ и т. д. Вообще, интервальная производная любого n-го порядка $\tilde{y}^{(n)}_{\tilde{x}}=\tilde{f}^{(n)}_{\tilde{x}}(\tilde{x})$ определяется выражением следующего вида

$$\tilde{y}^{(n)}_{\tilde{x}}=[y^{(n-1)}_{\tilde{x}}(\tilde{x})]', \quad n=1,2,3,\ldots, \qquad (13)$$

где обозначение $\tilde{y}^{0}_{\tilde{x}}$ означает исходную интервальную функцию вида $\tilde{y}=\tilde{f}(\tilde{x})$, определяемую по формуле (5).

Согласно определениям (12), (13) интервальной производной любого порядка, все интервальные производные, как и исходная интервальная функция (5), при любом численном значении аргумента $\tilde{x}$ в виде интервала возможных значений $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ также принимают численное значение в виде интервала возможных значений. Поэтому вычисление интервальной функции и интервальной производной от нее любого порядка заключается в вычислении нижних и верхних границ соответствующих интервалов. Вычисление интервальной функции $\tilde{f}$ выполняется по формуле (5), задающей данную функцию в виде пары «нижняя f_1 и верхняя f_2 граничные функции». Вычисление интервальной производной любого n-го порядка $\tilde{y}_{\tilde{x}}^{(n)} = \tilde{f}^{(n)}(\tilde{x})$ выполняется с помощью следующей формулы, выведенной в [3–4]:

$$\tilde{y}_{\tilde{x}}^{(n)} \equiv \left[y_{1,\tilde{x}}^{(n)}, y_{2,\tilde{x}}^{(n)}\right] = \left[-\frac{2^{n-1}(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)^n}, \frac{2^{n-1}(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)^n}\right], \quad \tilde{x}=[x_1,x_2],\ n=1,2,3,\ldots \tag{14}$$

или, по-другому,

$$\tilde{f}^{(n)}(\tilde{x}) \equiv \left[f_1^{(n)}(\tilde{x}), f_2^{(n)}(\tilde{x})\right] = \left[-\frac{2^{n-1}(f_2(\tilde{x})-f_1(\tilde{x}))}{(x_2-x_1)^n}, \frac{2^{n-1}(f_2(\tilde{x})-f_1(\tilde{x}))}{(x_2-x_1)^n}\right], \quad \tilde{x}=[x_1,x_2],\ n=1,2,3,\ldots, \tag{15}$$

где $y_{1,\tilde{x}}^{(n)} = f_1^{(n)}(\cdot), y_{2,\tilde{x}}^{(n)} = f_2^{(n)}(\cdot)$ – нижняя и верхняя граничные функции интервальной производной n-го порядка $\tilde{y}_{\tilde{x}}^{(n)} = \tilde{f}^{(n)}(\cdot)$ от исходной интервальной функции $\tilde{y}=[y_1,y_2]=\tilde{f}(\tilde{x})=[f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x})]$, задаваемой формулой (5).

Как видно из формул (14), (15), интервальная производная любого n-го порядка, в отличие от обычной производной, выражается в явном виде через независимую $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ и зависимую $\tilde{y}=[y_1,y_2]$, $y_1=f_1(\tilde{x})$, $y_2=f_2(\tilde{x})$, переменные исходной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(\tilde{x})=[f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x})]$. Эта важная особенность интервальных производных функций принципиально упрощает теорию и методы решения интервально-дифференциальных уравнений.

Условимся в дальнейшем в обозначении интервальной производной $\tilde{y}_{\tilde{x}}^{(n)}$ любого порядка n оставлять обозначение точки $\tilde{x}$ только в том случае, когда нас интересует значение производной именно в этой точке, и опускать его, записывая эту производную в виде $\tilde{y}^{(n)}$, в остальных случаях, когда нас интересуют ее значения во всех точках.

3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ОБ ИНТЕРВАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Как известно из общей теории дифференциальных уравнений, предмет указанной теории – это задачи, решение которых сводится к решению одного или нескольких уравнений, содержащих производные искомых функций. Такие уравнения называются дифференциальными. Более точно дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y=f(x)$ и ее производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Если искомая функция есть функция одной независимой переменной, как в нашем случае, дифференциальное уравнение называется обыкновенным. Если искомая функция является функцией двух или более независимых переменных, дифференциальное уравнение называется уравнением с частными производными. В данной работе рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Порядок старшей производной, которая входит в дифференциальное уравнение, называется порядком этого уравнения. Таким образом, дифференциальное уравнение n-го порядка имеет следующий общий вид:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{16}$$

где $F(\cdot)$ – некоторая функция от переменных в скобках. В частных случаях в уравнение (16) могут и не входить переменные x, y и отдельные производные от функции y порядка ниже, чем n, но это не изменит порядка указанного уравнения, который равен n. Например, уравнения $2x+3y-4y'=0$ и $3y-4y'=0$ имеют порядок, равный 1, а уравнения $2x+3y-4y'+y''=0$ и $3y+y''=0$ – порядок, равный 2.

Любая функция $y=f(x)$, которая при подстановке в уравнение (16) обращает его в тождество, называется решением этого уравнения. Например, функция $y=e^x$ является решением уравнения $y-2y+y''=0$, т. к. она при подстановке в это уравнение обращает его в тождество.

Будем теперь рассматривать задачи, решение которых в конечном итоге сводится к решению уравнений (одного или нескольких), содержащих интервальные производные искомых интервальных функций, которые были введены в § 2. Такие уравнения будем называть интервально-дифференциальными. Более точно интервально-дифференциальным уравнением будем называть соотношение, связывающее независимую интервальную переменную $\tilde{x}=[x_1,x_2]$, интервальную искомую функцию $\tilde{y}=\tilde{f}(\tilde{x})$ вида (5) и ее интервальные производные $\tilde{y}', \tilde{y}'', \ldots, \tilde{y}^{(n)}$. Если искомая интервальная функция является функцией одной независимой интервальной переменной, как в рассматриваемом случае, интервально-дифференциальное уравнение назовем обыкновенным. Если искомая интервальная функция является функцией двух или более независимых интервальных переменных, интервально-дифференциальное уравнение назовем уравнением с частными интервальными производными. В этой работе будем рассматривать только обыкновенные интервально-дифференциальные уравнения.

Как и в случае обычных (детерминированных) дифференциальных уравнений (16), порядок старшей производной, которая входит в любое интервально-дифференциальное уравнение, будем называть порядком этого уравнения. Таким образом, интервально-дифференциальное уравнение n-го порядка можно записать в следующем общем виде

$$\tilde{F}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{y}',\tilde{y}'',\ldots,\tilde{y}^{(n)})=\tilde{a}\,, \tag{17}$$

где $\tilde{F}(\cdot)$ – интервальная функция от переменных в скобках; $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ – независимая интервальная переменная; $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ – зависимая интервальная переменная, находящаяся в функциональной зависимости $\tilde{y}=\tilde{f}(\tilde{x})$ от независимой переменной $\tilde{x}$; $\tilde{y}',\tilde{y}'',\ldots,\tilde{y}^{(n)}$ – интервальные производные порядка $1,2,\ldots,n$ от интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(\tilde{x})$; $\tilde{a}=[a_1,a_2]$ – числовой интервал.

Аналогично случаю детерминированных дифференциальных уравнений (16), в частных случаях в интервально-дифференциальное уравнение (17) могут и не входить интервальные переменные $\tilde{x},\tilde{y}$ и отдельные интервальные производные от функции $\tilde{y}$ порядка ниже, чем n, но это не изменит порядка данного уравнения. Любая интервальная функция $\tilde{y}=\tilde{f}(\tilde{x})$, которая при подстановке в уравнение (17) обращает его в тождество, называется решением уравнения.

Наша задача заключается в нахождении систематического метода и алгоритма решения интервально-дифференциального уравнения (17).

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИНТЕРВАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Будем называть интервальную функцию алгебраической, если она получена путем суперпозиции интервальных алгебраических операций сложения, вычитания, умножения и деления (3) над независимыми интервальными переменными указанной функции. Далее будем всегда предполагать, что интервальная функция $\tilde{F}$, связывающая переменные в интервально-дифференциальном уравнении (17), является алгебраической. В этих условиях оказывается справедливой следующая основная теорема.

Теорема 1. Любое интервально-дифференциальное уравнение вида (17) эквивалентно некоторой системе из двух детерминированных алгебраических уравнений вида

$$\left.\begin{aligned}F_1(x_1,x_2,y_1,y_2)=a_1\\ F_2(x_1,x_2,y_1,y_2)=a_2\end{aligned}\right\}, \tag{18}$$

в которой $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная искомой интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(\tilde{x})$; $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная указанной выше интервальной функции; F_1 и F_2 – некоторые детерминированные функции, представляющие собой нижнюю и верхнюю границы интервальной связывающей функции $\tilde{F}$ уравнения (17) (т. е. $\tilde{F}=[F_1,F_2]$).

Доказательство. Согласно нашему предположению, интервальная функция $\tilde{F}$ от переменных $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{y}',\tilde{y}'',\ldots,\tilde{y}^{(n)}$ в уравнении (17) является алгебраической. Поэтому она имеет вид суперпозиции элементарных операций над указанными интервальными переменными. В свою очередь, часть указанных интервальных переменных, а именно, производные $\tilde{y}',\tilde{y}'',\ldots,\tilde{y}^{(n)}$ по формуле (15) представляют собой суперпозиции элементарных алгебраических операций над интервальными переменными $\tilde{x}=[x_1,x_2], \tilde{y}=[y_1,y_2]$, где $y_1=f_1(\tilde{x}),\ y_2=f_2(\tilde{x})$. Таким образом, интервальная функция $\tilde{F}$ в уравнении (17) в целом может быть представлена в виде суперпозиции элементарных алгебраических операций только над интервальными переменными $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ и $\tilde{y}=[y_1,y_2]$.

Учитывая, что этими элементарными операциями являются сложение, вычитание, умножение и деление, определяемые выражениями (3), и используя формулы (4) для выполнения этих операций, мы получим выражение левой части уравнения (17) в виде интервала, нижняя и верхняя границы которого представляют собой некоторые суперпозиции границ интервальных переменных $\tilde{x}=[x_1,x_2], \tilde{y}=[y_1,y_2]$. Уравнение (17), таким образом, перепишется в явной интервальной форме

$$[F_1(x_1,x_2,y_1,y_2),\ F_2(x_1,x_2,y_1,y_2)]=[a_1,a_2], \tag{19}$$

где F_1 и F_2 – некоторые детерминированные функции. Но два интервала равны, только если равны их одноименные границы [2]. Поэтому из (19) получаем эквивалентное ему условие (18). Но условие (19), как следует из приведенного доказательства, эквивалентно уравнению (17), следовательно, условие (18) тоже эквивалентно уравнению (17), что и требовалось доказать.

Как следует из теоремы 1, для решения произвольного интервально-дифференциального уравнения (17) следует действовать согласно алгоритму.

Шаг 1. Заменить в уравнении (17) все вхождения интервальных производных $\tilde{y}',\tilde{y}'',\ldots,\tilde{y}^{(n)}$ их выражениями (15) через искомую интервальную функцию $\tilde{y}=[y_1=f_1(\tilde{x}),\ y_2=f_2(\tilde{x})]$. В результате интервально-дифференциальное уравнение (17) перейдет в интервально-алгебраическое уравнение с неизвестной переменной $\tilde{y}$.

Шаг 2. Использовать выражения (4) для выполнения элементарных алгебраических операций над интервалами, выразить левую часть получившегося уравнения (17) в виде интервала, нижняя и верхняя границы которого имеют вид суперпозиций (функций) нижних и верхних границ интервальных переменных $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ и $\tilde{x}=[x_1,x_2]$.

Шаг 3. Используя результаты шага 2, необходимо представить уравнение (17) в явной интервальной форме (19).

Шаг 4. Приравняв в (19) одноименные границы левой и правой частей, перейти к эквивалентной заданному интервально-дифференциальному уравнению (17) системе двух детерминированных алгебраических уравнений (18).

Шаг 5. Решить систему алгебраических уравнений (18). Найденное решение этой системы в виде $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$, где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ ($y_1 = f_1(\tilde{x})$, $y_2 = f_2(\tilde{x})$), будет также искомым решением интервально-дифференциального уравнения (17).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье показана возможность формирования дифференциальных уравнений на базе понятия интервальной производной, т. е. производной от недетерминированной функции, в которой переменные задаются с точностью до интервалов возможных значений. Новые уравнения позволяют моделировать динамику систем с интервальной неопределенностью их функций-характеристик. Главные отличия введенной интервальной производной и основанного на ней интервально-дифференциального исчисления заключаются в том, что производная любого порядка от интервальной функции снова является интервальной функцией, причем она выражается в явном виде через независимую и зависимую переменные первообразной функции. Благодаря этому свойству любое интервально-дифференциальное уравнение (17) легко сводится к эквивалентной системе двух алгебраических уравнений (18), решение которых дает решение исходного уравнения (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. М.: Наука, 2005.
2. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 360 с.
3. *Левин В.И.* Интервальная производная и начала недетерминистского дифференциального исчисления // Онтология проектирования. 2013. № 4 (10). С. 72-85.
4. *Левин В.И.* Интервально-дифференциальное исчисление и некоторые его применения // Информационные технологии. 2014. № 7. С. 3-10.

Поступила в редакцию 26 февраля 2015 г.

Levin V.I. THE INTERVAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS AND METHOD OF ITS SOLUTION

The generalization of ordinary differential equations on the interval case is considered. The general concept of interval-differential equation, its order, as well as the solution of interval differential equations are given. An approach to the solution of interval differential equations is developed. It is proved that any interval-differential equation can be reduced to a system of two ordinary algebraic equations. An algorithm for solving equations is given.

Key words: interval-differential equation; interval derivative; system; uncertainty.

Левин Виталий Ильич, Пензенская государственная технологическая академия, г. Пенза, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, советник ректора по науке, заслуженный деятель науки Российской Федерации, e-mail: levin@pgta.ru

Levin Vitaly Ilyich, Penza State Technological Academy, Penza, Russian Federation, Doctor of Technics, Professor, Science Advisor of Rector, Honored Worker of Science of Russian Federation, e-mail: levin@pgta.ru