of UB RAS, Ekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, e-mail: kleimenov@imm.uran.ru

УДК 519.853.3

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛА В МОДИФИЦИРОВАННОМ МЕТОДЕ СИМПЛЕКСНЫХ ПОГРУЖЕНИЙ

© **А.В. Колосницын**

Ключевые слова: модифицированных метод симплексных погружений; субдифференциал выпуклой функции; результирующая секущая плоскость.

В статье рассматривается модифицированный метод симплексных погружений, который относится к классу методов центрированных сечений. Особенностью метода является оценка слабой скорости сходимости, которая зависит только от числа отсеченных секущей плоскостью вершин симплекса, который аппроксимирует множество допустимых решений. Чем больше вершин отсекает секущая плоскость, тем выше скорость сходимости метода. Используя данную оценку скорости сходимости, метод симплексных погружений снабжается критерием выбора секущей плоскости, отсекающей наибольшее число вершин симплекса. Полученный модифицированный метод применяется для решения специального класса задач выпуклой недифференцируемой оптимизации, состоящий из двух типов функций. При этом возникает необходимость в параметрическом описании субдифференциалов функций из введенного класса задач для возможности определения секущей плоскости, которая отсекает наибольшее число вершин симплекса, что позволяет ускорить поиск решения. Искомые секущие плоскости формируются посредством решения вспомогательных минимаксных задач. Приводятся результаты численного тестирования модифицированного алгоритма метода симплексных погружений.

Введение

Метод симплексных погружений, исследования которого впервые были опубликованы в работах Е.Г. Анциферова и В.П. Булатова [1], представляет собой аналог известного метода эллипсоидов и отличается от последнего лишь видом аппроксимирующих решение множеств. Вместо эллипсоидов используются n-мерные симплексы. Отметим, что метод эллипсоидов сыграл важную роль в теории сложности задач математического программирования и позволил в 1979 г. Л.Г. Хачияну построить и обосновать первый полиномиальный алгоритм решения задачи линейного программирования с рациональными коэффициентами [2]. Идеи метода эллипсоидов развивались в работах Н.З. Шора [3] как частного случая алгоритма с растяжением пространства, а также в работах Д.Б. Юдина и А.С. Немировского [4] как метода последовательных отсечений.

В [5] рассматривается метод симплексных погружений с учетом нескольких секущих плоскостей, на основе которого автором разработана и представлена в настоящей статье модификация метода симплексных погружений для решения задач выпуклой недифференцируемой оптимизации, учитывающая возможную неоднозначность выбора секущей плоскости.

1. Постановка задачи и основные определения

В статье рассматривается задача выпуклого программирования в следующей постановке:

$$\begin{cases} \phi_0(x) = \sum\limits_{j=1}^{\eta_0^I} f_{0j}^I(x) + \sum\limits_{j=1}^{\eta_0^{II}} f_{0j}^{II}(x) \to \min, \\ \phi_i(x) = \sum\limits_{j=1}^{\eta_i^I} f_{ij}^I(x) + \sum\limits_{j=1}^{\eta_i^{II}} f_{ij}^{II}(x) \leqslant 0, \quad i = 1, ..., m, \\ x \in S_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $S_0 \subset \mathbb{R}^n$ — симплекс, функции

$$f_{ij}^I(x) = \sum_{l=1}^{\nu_{ij}^I} \alpha_{ijl}^I \left| \left(a_{ijl}^I\right)^T x - \beta_{ijl}^I \right|, f_{ij}^{II}(x) = \max_{1 \leqslant l \leqslant \nu_{ij}^{II}} \left\{ \alpha_{ijl}^{II} \left| \left(a_{ijl}^{II}\right)^T x - \beta_{ijl}^{II} \right| \right\}, \tag{2}$$

скаляры $\alpha_{ijl}^I, \alpha_{ijl}^{II} \in \mathbb{R}_+$, $\beta_{ijl}^I, \beta_{ijl}^{II} \in \mathbb{R}$, векторы $a_{ijl}^I, a_{ijl}^{II} \in \mathbb{R}^n$.

Задача (1)-(2) относится к классу задач так называемого полиэдрального программирования [6]. Задача полиэдрального программирования состоит в минимизации полиэдральной целевой функции при ограничениях-неравенствах, так же задаваемых полиэдральными функциями. Полиэдральной функцией называется функция, надграфик которой представляет собой полиэдральное (многогранное) множество. Основные методы полиэдрального программирования основаны на редукции к задачам линейного программирования. Редукция эта базируется на следующем факте: любая полиэдральная функция представима в виде функции максимума конечного числа аффинных функций. Введение дополнительных переменных и позволяет перейти от задачи полиэдрального программирования к задаче линейного программирования. Однако такое сведение может оказаться весьма трудоемким. Проанализируем функцию $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$. Очевидно, что F полиэдральна (многогранна), но её число граней равно 2^n, поэтому представлять F в виде максимума конечного числа функций нецелесообразно. В основе метода, используемого в данной статье, лежит параметрическое описание субдифференциалов функций, представленных в (2).

2. Параметрическое описание субдифференциалов

Пусть задана полиэдральная функция следующего вида

$$F^I(x) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \left| a_i^T x - \beta_i \right|, \tag{3}$$

$\alpha_i \in \mathbb{R}_+,\ a_i \in \mathbb{R}^n,\ \beta_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, \nu$. Используя правила субдифференциального исчисления [7], приведем полное описание субдифференциала функции F^I. Сначала рассмотрим функцию $\varphi_i(x) = \alpha_i |a_i^T x - \beta_i| = \alpha_i \max\{a_i^T x - \beta_i, -a_i^T x + \beta_i\}$. Тогда

$$\partial\varphi_i(x) = \begin{cases} \{\alpha_i a_i\}, & a_i^T x - \beta_i > 0, \\ \{\alpha_i(2\lambda_i - 1)a_i : 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1\}, & a_i^T x - \beta_i = 0, \\ \{-\alpha_i a_i\}, & a_i^T x - \beta_i < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Из (3),(4) и правила вычисления субдифференциала суммы получаем

$$\partial F^I(x) = \{p : p = \sum_{i \in K_I^+(x)} \alpha_i a_i - \sum_{i \in K_I^-(x)} \alpha_i a_i + \sum_{i \in K_I^0(x)} \alpha_i (2\lambda_i - 1) a_i, 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1, i \in K_I^0(x)\}, \tag{5}$$

$K_I^+(x) = \{i : a_i^T x - \beta_i > 0\},\ K_I^0(x) = \{i : a_i^T x - \beta_i = 0\}, K_I^-(x) = \{i : a_i^T x - \beta_i < 0\}$.

Перейдем к нахождению субдифференциала функции

$$F^{II}(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant \nu} \{\alpha_i \left| a_i^T x - \beta_i \right|\}.$$

Снова используя правила субдифференциального исчисления [7], получим

$$\partial F^{II}(x) = \{q : q = \sum_{i \in K_{II}(x)} \mu_i r_i, r_i \in \partial \varphi_i(x), \mu_i \geqslant 0, i \in K_{II}(x), \sum_{i \in K_{II}(x)} \mu_i = 1\} =$$

$$= \{q : q = \sum_{i \in K_{II}(x)} \mu_i \left(\lambda_{i1} \alpha_i a_i + \lambda_{i2}(-\alpha_i a_i)\right), \mu_i \geqslant 0, i \in K_{II}(x), \sum_{i \in K_{II}(x)} \mu_i = 1\}. \qquad (6)$$

В (6) $\alpha_{i1} = 1,\ \alpha_{i2} = 0$, если $a_i^T x - \beta_i > 0$; $\alpha_{i1} + \alpha_{i2} = 1, \alpha_{i1} \geqslant 0, \alpha_{i2} \geqslant 0$, если $a_i^T x - \beta_i = 0$; $\alpha_{i1} = 0,\ \alpha_{i2} = 1$, если $a_i^T x - \beta_i < 0$. Поскольку

$$\sum_{i \in K_{II}(x)} \mu_i \left(\lambda_{i1} + \lambda_{i2}\right) = \sum_{i \in K_{II}(x)} \mu_i = 1,$$

то из (6) имеем

$$\partial F^{II}(x) = co\{\pm \alpha_i a_i,\ i \in K_{II}(x)\},$$

т. е. $\partial F^{II}(x)$ — выпуклая оболочка векторов $\pm \alpha_i a_i,\ i \in K_{II}(x)$ и

$$\partial F^{II}(x) =$$

$$= \{q : q = \sum_{i \in K_{II}(x)} (\mu_i^+ - \mu_i^-) \alpha_i a_i, \sum_{i \in K_{II}(x)} (\mu_i^+ + \mu_i^-) = 1, \mu_i^+ \geqslant 0, \mu_i^- \geqslant 0, i \in K_{II}(x)\}. \qquad (7)$$

Используя (5) и (7) можно получить полное описание субдифференциалов полиэдральных функций в (1) и (2).

3. Метод симплексных погружений и его модификация

Основную идею метода симплексных погружений для решения задачи вида (1) можно представить следующим образом. На k-м шаге $(k \geqslant 0)$ допустимое множество решений поставленной задачи погружается в симплекс S_k. Находится центр данного симплекса x^k, через который проводится отсекающее полупространство $L_k = \{x : g_k^T (x - x^k) \leqslant 0\}$. Затем усеченный симплекс $\tilde{S}_k = S_k \bigcap L_k$, содержащий решение, погружается в новый симплекс минимального объема S_{k+1}. Повторяя такую процедуру, мы строим новые симплексы меньшего объема, последовательно локализуя решение, и останавливаемся, когда объем симплекса становится достаточно малым. Полное описание метода и обоснование его сходимости приведено в [1].

Уникальным свойством метода симплексных погружений является оценка сокращения объема двух последовательнях симплексов

$$\gamma_k = \frac{V\left(S_{k+1}\right)}{V(S_k)} \leqslant \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 1, \\ \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1}, & 2 \leqslant k \leqslant n, \end{cases} \qquad (8)$$

где k – число сохраненных при отсечении вершин симплекса. Оценка скорости сходимости (8) зависит только от числа отсеченных вершин симплекса, причем, при отсечении n вершин симплекса мы получаем аналог метода дихотомии. Хорошо известно [7], что (8) дает оценку скорости сходимости метода по целевой функции (слабая сходимость).

Если есть возможность варьировать отсекающую плоскость, т. е. подбирать нормаль g_k отсекающей плоскости так, чтобы отсечь как можно большее количество вершин, то согласно (8) можно увеличить скорость сходимости. Для рассматриваемой задачи (1) такая вариация возможна в силу недиффиренцируемости целевой функции и функций-ограничений. Обычно, в качестве нормали отсекающей плоскости берется либо субградиент целевой функции, либо субградиент ограничения. Если в текущей точке x^k используемый субдифференциал G_k состоит более чем из одной точки, то как раз в этом случае имеется свобода выбора нормали отсекающей плоскости.

Предлагаемая модификация метода симплексных погружений обобщает идею, описанную в [5], на случай задачи (1)-(2). Пусть на k-й итерации метода симплексных погружений выбирается нормаль $g_k \in G_k$. Выбор нормали будем осуществлять исходя из решения следующей минимаксной задачи:

$$\min_{g_k \in G_k} \max_j \{g_k^T \left(v^j - x^k\right)\}. \tag{9}$$

Данная минимаксная задача позволяет определить нормаль полупространства отсекающего наибольшее количество вершин v^j, $j = 1, \ldots, n+1$ симплекса S_k. Для рассматриваемого класса задач множество G_k на каждом шаге строится на основе формул (5) и (7). Поскольку описание субдифференциалов в этих формулах линейно относительно используемых параметров $\lambda_i, \mu_i^+, \mu_i^-$, то минимаксная задача (9) введением новых переменных с водится к задаче линейного программирования относительно параметров, задающих наилучшее положение отсекающего полупространства.

4. Численный эксперимент

Предварительное численное тестирование проводилось на задаче выпуклой безусловной минимизации из введенного вида

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \left(\alpha_i \left|a_i^T x - b_i\right| + r_i\right) \to \min, \;\; x \in S_0 \subset \mathbb{R}^n$$

с известной заранее точкой минимума x^*. Задачи генерировались случайным образом.

Вычисления проводились в системе GAMS на компьютере с четырехядерным процессором Intel Core i7/2.3GHz, 8 Gb оперативной памяти. Результаты представлены в таблице 1, в которой приняты следующие обозначения: n — число переменных, m — число слагаемых в целевой функции, k_B — число итераций базового метода, T_B — время работы (в секундах) базового метода, k_M — число итераций модифицированного метода, T_M — время работы (в секундах) модифицированного метода, k_{minmax} — количество минимаксных задач, решенных в ходе работы модифицированного метода. В таблице приведены средние результаты по сериям из пяти задач для каждой размерности. Точность решения ε принималось равной 10^{-5}.

Таблица 1

Результаты численного эксперимента

n	m	k_B	T_B	k_M	T_M	k_{minmax}
5	120	152	2.128	144	2.328	4
10	300	345	4.830	330	6.258	21
20	700	1337	21.392	1298	35.240	216
30	1200	3729	182.732	3582	243.071	866
40	2200	7307	255.745	7169	594.683	2203
50	3000	11250	393.750	11032	815.798	3942

Из проведённого вычислительного эксперимента можно сделать следующие выводы. Для того, чтобы проявился эффект от решаемых минимаксных задач необходимо, чтобы число слагаемых m в целевой функции (или другими словами число линейных кусков целевой функции) существенно превышало число переменных. Чем больше m, чем чаще появляется возможность использовать неоднозначность субградиента. Время работы и базового и модифицированного методов вполне приемлемо для задач недифференцируемой оптимизации. То, что из-за решения вспомогательных минимаксных задач время работы модифицированного метода превышает время работы базового не должно вводить в заблуждение. Главной целью предлагаемой методики является сокращение количества итераций, что и было достигнуто. Во многих неявных задачах выпуклой недифференцируемой оптимизации (например, при декомпозиции задач линейного или выпуклого пограммирования большой размерности) время вычисления значения целевой функции значительно может превышать время решения вспомогательной минимаксной задачи. Адаптация и тестирование модифицированного метода симплексных погружений на неявных задачах выпуклого программирования — цель дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Анциферов Е.Г., Булатов В.П.* Алгоритм симплексных погружений в выпуклом программировании // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 3. С. 377–384.
2. *Хачиян Л.Г.* Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 1. С. 51-68.
3. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наук. думка, 1979. 200 с.
4. *Юдин Д.Б., Немировский А.С.* Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач // Экономика и мат. методы. 1976. Вып. 2. С. 357-369.
5. *Апекина Е.В., Хамисов О.В.* Модифицированный метод симплексных погружений с одновременным введением нескольких секущих плоскостей // Изв. вузов. Матем. 1997. № 3. С. 16–24.
6. *Филимонов А.Б., Филимонов Н.Б.* Полиэдральное программирование: элементы теории и приложения // Информационные технологии. 1999. № 11. С. 2-12.
7. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию М.: Наука, 1983. 384 с.
8. *Нестеров Ю.Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. М.: МЦНМО, 2010. 280 с.
9. *Нурминский Е.А.* Численные методы выпуклой оптимизации. М.: Наука, 1991. 168 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ № 15–07–08986 .

Поступила в редакцию 07 мая 2015 г.

Kolosnitcyn A.V. USING OF PARAMETRIC REPRESENTATION OF SUBDIFFERENTIAL IN MODIFIED SIMPLEX IMBEDDINGS METHOD

We consider the modified simplex imbeddings method, which is related to the class of cutting plane methods. The main feature of this method is the convergence estimation, which depends only on the quantity of simplex vertices, that are cut off by the cutting plane. The more vertices are cut off the higher speed of method convergence. This estimation let us obtain the criteria of cutting plane choosing, that provide better speed of method convergence and form modification of simplex imbeddigs method. The modified method is applied to solving special class of convex non-differentiable problems. Then we describe the functions subdifferentials that are depend on several parameters. It let us form auxiliary problems for searching resulting cutting planes, that cut off as much vertices of simplex as possible and increase the speed of finding of optimal solution. The results of numerical experiment are also given in this paper.

Key words: modified simplex imbeddings method; subdifferential of convex functions; resulting cutting plane.

Колосницын Антон Васильевич, Институт систем энергетики им. Л.А Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: ankolos25@mail.ru

Kolosnitcyn Anton Vasilievich, Melentiev Energy Systems Institute of SB RAS, Irkutsk, the Russian Federation, e-mail: ankolos25@mail.ru

УДК 517.911.5

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ МЕТОДА МНОГОЛИСТНОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© С.В. Корнев

Ключевые слова: дифференциальное включение; многолистная направляющая функция; периодические решения; топологическая степень.

Рассматривается периодическая задача для нелинейного объекта, описываемого дифференциальным включением, правая часть которого не является выпуклозначной. В настоящей работе определяются и исследуются понятия полного и острого набора обобщенных многолистных направляющих функций и правильной многолистной направляющей функции. Применение теории топологической степени мультиотображений и указанных методов позволяет установить разрешимость рассматриваемой задачи.

В настоящей работе, следуя идеям [1–3], предлагается использовать метод многолистных направляющих функций для исследования задачи о существовании периодических решений дифференциального включения следующего вида:

$$z'(t) \in R(t, z(t)), \tag{1}$$

в предположение, что $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ является нормальным мультиотображением с компактными значениями и удовлетворяет условию T-периодичности ($T > 0$) по первому аргументу (по поводу терминологии см., например, [4, 5]).

Под решением задачи понимается абсолютно непрерывная функция $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую почти в каждой точке включению (1) и условию периодичности.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n (n > 2)$ выделена двумерная плоскость $\mathbb{R}^2$ и дополнительное к ней подпространство $\mathbb{R}^{n-2}$. Пусть q – оператор проектирования на плоскость $\mathbb{R}^2$ вдоль подпространства $\mathbb{R}^{n-2}$, а $p = I - q$. Ниже элементы $\mathbb{R}^2$ обозначаются через ξ, элементы $\mathbb{R}^{n-2}$ – через ζ. Пусть φ, ρ – полярные координаты в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим многолистную риманову поверхность $\Pi = \{(\varphi, \rho) : \varphi \in (-\infty, \infty), \rho \in (0, \infty)\}$. Пусть на Π задана скалярная непрерывно дифференцируемая функция $W(\varphi, \rho)$, для которой

$$\frac{\partial W(\varphi, \rho)}{\partial \varphi} > 0, \qquad W(\varphi + 2\pi, \rho) = W(\varphi, \rho) + 2\pi, \quad (\varphi, \rho) \in \Pi. \tag{2}$$

На подпространстве $\mathbb{R}^{n-2}$ пусть заданы скалярные непрерывно дифференцируемые функции

$$V_1(\zeta), V_2(\zeta), ..., V_k(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}^{n-2},\ k \geqslant 1. \tag{3}$$