Отметим, что необходимое условие оптимальности имеет следующую наглядную интерпретацию. Пусть управление $u = u(t)$ оптимально. Сдвинем целевое множество A вдоль векторного поля $(t, x) \mapsto \mathbf{v}\big(t, x, u(t)\big)$ в обратном времени. Обозначим образ множества A в момент времени τ через A^τ. Тогда для почти каждого τ управляющий параметр $u(\tau)$ должен быть выбран так, чтобы минимизировать поток вещества, вытекающего из области A^τ.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа частично поддержана РФФИ (грант № 14-01-31254).

Поступила в редакцию 10 июня 2015 г.

Pogodaev N.I. AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE CONTINUITY EQUATION
In the talk we consider an optimal control problem for the continuity equation. The controller's aim is to maximize the total mass within a target set by a given time moment. We prove the existence of optimal controls and present a necessary optimality condition.
Key words: continuity equation; optimal control; necessary optimality conditions.

Погодаев Николай Ильич, Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории Математических методов анализа свойств динамических систем, e-mail: n.pogodaev@icc.ru

Pogodaev Nikolay Ilich, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher of the Mathematical Methods of Analysis of Properties in Dynamical Systems Laboratory, e-mail: n.pogodaev@icc.ru

УДК 517.977.56

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ГРАФЕ

© С.Л. Подвальный, В.В. Провоторов

Ключевые слова: дифференциальная система с распределенными параметрами на графе; обобщенные решения; граничное управление; граничное наблюдение.
Для дифференциальной системы, состояние которой описывается параболической начально-краевой задачей с распределенными параметрами на графе, рассматривается задача граничного управления в классе обобщенных решений. При этом управление и наблюдение одновременно являются граничными, получены условия существования единственного управления и соотношения, характеризующие управления.

Настоящая работа продолжает исследования, результаты которых приведены в [1–4]: использован подход, основанный на априорных оценках обобщенных решений начально-краевой задачи для уравнений параболического типа с распределенными параметрами на графе. На этой базе рассмотрена задача, когда управление и наблюдение одновременно являются граничными, получены условия существования единственного управления и соотношения, характеризующие управления. Все рассмотрения используют произвольный связный ограниченный ориентированный граф, допускающий наличие циклов.

На протяжении всей работы используются принятые в [4, 5] обозначения. Обозначим через $\partial\Gamma$ множество граничных, через $J(\Gamma)$ — множество внутренних узлов графа Γ и пусть Γ_0 — объединение всех ребер, не содержащих концевых точек, $\partial\Re$ — множество всех граничных ребер (ребер, содержащих граничные узлы $\xi \in \partial\Gamma$); $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0,T)$ ($\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0,t)$), $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0,T)$. Каждое ребро γ графа Γ параметризуется отрезком $[0,1]$ и параметром $x \in [0,1]$, ориентация ребер установлена в [5, с. 88]. Введем необходимые пространства: $L_2(\Gamma)$ — пространство функций, суммируемых с квадратом на Γ (аналогично определяется пространство $L_2(\Gamma_T)$); $L_{2,1}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_1(\Gamma_T)$ с нормой $\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int\limits_0^T (\int\limits_\Gamma f^2(x,t)dx)^{1/2}dt$; $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ — пространство функций $f(x,t) \in L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка по x, принадлежащую $L_2(\Gamma_T)$, $\|f\|^2_{W_2^{1,0}(\Gamma_T)} = \int\limits_{\Gamma_T} \left(f(x,t)^2 + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}^2\right) dxdt$.

Рассмотрим билинейную форму

$$\ell(\mu,\nu) = \int\limits_\Gamma \left(a(x)\frac{d\mu(x)}{dx}\frac{d\nu(x)}{dx} + b(x)\mu(x)\nu(x)\right)dx,$$

коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ – фиксированные измеримые ограниченные на Γ_0 функции, суммируемые с квадратом: $0 < a_* \leqslant a(x) \leqslant a^*$, $b_* \leqslant b(x) \leqslant b^*$, $x \in \Gamma_0$ (a_*, a^*, b_*, b^* — фиксированные постоянные). Обозначим через $W_2^{1,0}(a,\Gamma_T) \subset W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ пространство, являющееся замыканием в норме $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ множества гладких функций, удовлетворяющих соотношениям (условия согласования)

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j}\frac{\partial u(1,t)_{\gamma_j}}{\partial x} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j}\frac{\partial u(0,t)_{\gamma_j}}{\partial x} \tag{1}$$

для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$ и для любого $t \in [0,T]$ (существование таких функций показано в [5, с. 92]). Подробное описание всех используемых пространств приведено в [2–4].

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right) + b(x)y(x,t) = f(x,t), \tag{2}$$

$$y\mid_{t=0} = \varphi(x), x \in \Gamma, \quad a(x)\frac{\partial y}{\partial x}\mid_{\partial\Gamma} = v, (x,t) \in \partial\Gamma_T \tag{3}$$

отыскания решения $y(x,t)$ в области Γ_T, удовлетворяющего условиям (1); $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$, $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$; класс функций (управлений) v будет указан ниже.

О п р е д е л е н и е. Обобщенным решением задачи (2), (3) называется функция $y(x,t) \in W_2^{1,0}(a,\Gamma_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Gamma_T}\left(-y(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}\right)dxdt + \ell(y(x,t),\eta(x,t)) = \\ &= \int\limits_\Gamma \varphi(x)\eta(x,0)dx + \int\limits_{\partial\Gamma_T} v(x,t)\eta(x,t)dxdt + \int\limits_{\Gamma_T} f(x,t)\eta(x,t)dxdt \end{aligned} \tag{4}$$

для любых функций $\eta(x,t) \in W_2^1(a,\Gamma_T)$, равных нулю при $t = T$ ($W_2^1(a,\Gamma_T)$ — подпространство $W_2^1(\Gamma_T)$, плотным множеством в котором являются гладкие функции, удовлетворяющие (1)); через $\ell_T(\mu,\nu)$ обозначена билинейная форма

$$\ell_T(\mu(x,t),\nu(x,t)) = \int\limits_{\Gamma_T}\left(a(x)\frac{\partial\mu(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\nu(x,t)}{\partial x} + b(x)\mu(x,t)\nu(x,t)\right)dxdt.$$

Пусть $\mathbb{U} = L_2(\partial\Gamma_T)$ (пространство граничных управлений), f и φ — заданные элементы пространств $L_{2,1}(\Gamma_T)$ и $L_2(\Gamma)$, соответственно; $y(v)(x,t) \in W_2^{1,0}(a,\Gamma_T)$ (*состояние* *системы*) — обобщенное решение интегрального тождества (4) задачи (2), (3). Пусть наблюдение имеет вид $C(y(v)|_{\partial\Gamma_T})$, где $C: W_2^{1,0}(a,\Gamma_T) \to L_2(\partial\Gamma_T)$ — линейный непрерывный оператор (*оператор наблюдения*), $y(v)|_{\partial\Gamma_T}$ — след функции $y(v)$ на поверхности $\partial\Gamma_T$ (если $\partial\Gamma_T$ заменить на подмножество $S \subset \partial\Gamma_T$, то наблюдаются значения функции $y(v)$ на части S поверхности $\partial\Gamma_T$). Пусть далее $N: \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ — линейный непрерывный эрмитов оператор, $(Nv,v)_{\mathbb{U}} \geqslant \varsigma\|v\|_{\mathbb{U}}$ ($\varsigma > 0$ — фиксированная постоянная); $J(v)$ — функционал, требующий минимизации на выпуклом замкнутом множестве $\mathbb{U}_\partial \subset \mathbb{U}$ (*функция стоимости*): $J(v) = \|C(y(v)|_{\partial\Gamma_T}) - z_0\|^2_{L_2(\partial\Gamma_T)} + (Nv,v)_{\mathbb{U}}$, где $z_0(x,t) \in L_2(\partial\Gamma_T)$ — заданное наблюдение.

Т е о р е м а 1 [5, с. 129]. *Задача* (2), (3) *при* $v \in \mathbb{U}$ *однозначно разрешима в* $W_2^{1,0}(a,\Gamma_T)$ *и имеет место непрерывность линейного отображения* $v \to y(v)$ *пространства* $\mathbb{U}$ *в* $W_2^{1,0}(a,\Gamma_T)$.

Задача оптимального управления системой (2), (3) состоит в том, чтобы отыскать $\inf\limits_{v\in\mathbb{U}_\partial} J(v)$.

Предварительно приведем утверждение, основанное на теории минимизации коэрцитивных форм [5, с. 158].

Т е о р е м а 2 [4]. *Задача оптимального управления системой* (2), (3) *имеет единственное решение. Для того чтобы элемент* $u(x,t) \in \mathbb{U}_\partial$ *был оптимальным управлением, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие соотношения:*

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma_T}\left(-y(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}\right)dxdt + \ell(y(x,t),\eta(x,t)) = \\ = \int\limits_{\Gamma}\varphi(x)\eta(x,0)dx + \int\limits_{\partial\Gamma_T}u(x,t)\eta(x,t)dxdt + \int\limits_{\Gamma_T}f(x,t)\eta(x,t)dxdt\end{gathered} \tag{5}$$

для любых функций $\eta(x,t) \in W_2^1(a,\Gamma_T)$, *равных нулю при* $t = T$,

$$\int\limits_{\partial\Gamma_T}(C(y(v)|_{\partial\Gamma_T}) - z_0)C(y(v)|_{\partial\Gamma_T} - y(u)|_{\partial\Gamma_T})dxdt + (Nu, v-u)_{\mathbb{U}} \geqslant 0 \tag{6}$$

для любых $v \in \mathbb{U}_\partial$; *здесь* $y(u) \in W_2^{1,0}(a,\Gamma_T)$.

Неравенство (6) можно преобразовать с помощью сопряженного состояния системы (2), (3), учитывая симметричность формы $\ell_t(\mu,\eta)$ ($t \in [0,T]$). Сделаем это только для случая $C: L_2(\Gamma_T) \to L_2(\Gamma_T)$, тогда неравенство (6) можно переписать в виде

$$(C^*(Cy(u) - z_0), y(v) - y(u))_{L_2(\partial\Gamma_T)} + (Nu, v-u)_{\mathbb{U}} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathbb{U}_\partial \tag{7}$$

(здесь $C^*: L_2(\Gamma_T) \to L_2(\Gamma_T)$ — сопряженный к C оператор).

Для управления v сопряженное состояние $\omega(v) \in W_2^1(a,\Gamma_T)$, $\omega(v)(x,T) = 0$, определим соотношением

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma_T}\frac{\partial\omega(v)(x,t)}{\partial t}\zeta(x,t)dxdt + \\ + \ell_T(\omega(v)(x,t),\zeta(x,t)) = \int\limits_{\Gamma_T}C^*(C\omega(v)(x,t) - z_0(x,t))\zeta(x,t)dxdt \\ (\forall\zeta(x,t) \in W_2^{1,0}(a,\Gamma_T)).\end{gathered} \tag{8}$$

Пусть $y(v)(x,t)$ — решение (5), $y(u)(x,t)$ — решение (5) при $v = u$. Положим в (8) $v = u$ и $\zeta(x,t) = y(v)(x,t) - y(u)(x,t)$, получим, учитывая $\zeta(x,0) = 0$,

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma_T}\frac{\partial\omega(u)(x,t)}{\partial t}(y(v)(x,t) - y(u)(x,t))dxdt + \\ + \ell_T(\omega(u)(x,t), y(v)(x,t) - y(u)(x,t)) = \\ = \int\limits_{\partial\Gamma_T}C^*(C\omega(u)(x,t) - z_0(x,t))(y(v)(x,t) - y(u)(x,t))d\sigma.\end{gathered} \tag{9}$$

С другой стороны из соотношения (5) при $u = v$ вычтем предыдущее соотношения (5) и заменим $\eta(x,t)$ на $\omega(u)(x,t)$, получим соотношение

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma_T} \frac{\partial\omega(u)(x,t)}{\partial t}\left(y(v)(x,t) - y(u)(x,t)\right) dxdt + \\ + \ell_T(y(v)(x,t) - y(u)(x,t), \omega(u)(x,t)) = \\ = \int\limits_{\partial\Gamma_T} \left(v(x,t) - u(x,t)\right)\omega(u)(x,t)d\sigma.\end{gathered} \tag{10}$$

Сравнивая в (9) и (10) стоящие справа выражения и учитывая симметричность формы $\ell_T(y,\eta)$, приходим к равенству

$$\begin{gathered}\int\limits_{\partial\Gamma_T} C^*(C\omega(u)(x,t) - z_0(x,t))(y(v)(x,t) - y(u)(x,t))d\sigma = \\ = \int\limits_{\partial\Gamma_T} \omega(u)(x,t)\left(v(x,t) - u(x,t)\right)d\sigma,\end{gathered}$$

из которого вместе с (7) вытекает неравенство

$$\int\limits_{\partial\Gamma_T} \left(\omega(u)(x,t) + Nu(x,t)\right)\left(v(x,t) - u(x,t)\right)d\sigma \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathbb{U}_\partial, \tag{11}$$

эквивалентное неравенству (6). Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 3. *Пусть множество* $\mathbb{U}_\partial$ *ограничено. Для того чтобы элемент* $u(x,t) \in \in \mathbb{U}_\partial$ *был оптимальным управлением, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие соотношения*

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma_T}\left(-y(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}\right)dxdt + \ell(y(x,t),\eta(x,t)) = \\ = \int\limits_{\Gamma}\varphi(x)\eta(x,0)dx + \int\limits_{\partial\Gamma_T} u(x,t)\eta(x,t)d\sigma + \int\limits_{\Gamma_T} f(x,t)\eta(x,t)dxdt\end{gathered} \tag{12}$$

для любых функций $\eta(x,t) \in W_2^1(a,\Gamma_T)$, *равных нулю при* $t = T$,

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma_T}\frac{\partial\omega(v)(x,t)}{\partial t}\zeta(x,t)dxdt + \\ + \ell_T(\omega(v)(x,t),\zeta(x,t)) = \int\limits_{\partial\Gamma_T} C^*(C\omega(v)(x,t) - z_0(x,t))\zeta(x,t)d\sigma\end{gathered} \tag{13}$$

для любых функций $\zeta(x,t) \in W_2^{1,0}(a,\Gamma_T)$,

$$\int\limits_{\partial\Gamma_T}\left(\omega(u)(x,t) + Nu(x,t)\right)\left(v(x,t) - u(x,t)\right)d\sigma \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathbb{U}_\partial, \tag{14}$$

где $y(u) \in W_2^{1,0}(a,\Gamma_T)$, $\omega(v) \in W_2^1(a,\Gamma_T)$ и $\omega(v)(x,T) = 0$.

При этом: 1) если оператор $N \neq 0$, *то оптимальное управление* $u \in \mathbb{U}_\partial$ *единственно, 2) если* $N = 0$, *то соотношениям* (11)–(14) *удовлетворяет по крайней мере один элемент* $u \in \mathbb{U}_\partial$; *множество таких элементов соответствует совокупности оптимальных управлений, образующих выпуклое подмножество множества* $\mathbb{U}_\partial$.

Отметим неклассическую особенность рассмотренной задачи оптимального управления для дифференциальной системы (2), (3) с распределенными параметрами на графе — используется пространство суммируемых на цилиндре Γ_T функций в качестве пространства состояний задачи (2), (3), при этом пространство суммируемых на $\partial\Gamma_T$ включает пространство граничных управлений и граничных наблюдений. Отметим также возможность применимости представленных результатов в задачах асимптотической устойчивости нелинейных систем с запаздыванием [6] и задачах оптимизации сложных систем [7–10].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Подвальный С.Л., Провоторов В.В.* Определение стартовой функции в задаче наблюдения параболической системы с распределенными параметрами на графе // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2014. Т. 10. № 6. С. 29-35.

2. *Провоторов В.В.* Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы из m струн // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2012. № 1. С. 60-69.

3. *Провоторов В.В., Гнилицкая Ю.А.* Граничное управление волновой системой в пространстве обобщенных решений на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. № 3. С. 112-120.

4. *Провоторов В.В.* Оптимальное управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 3. С. 154-163.

5. *Провоторов В.В., Волкова А.С.* Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. Воронеж, 2014.

6. *Александров А.Ю., Жабко А.П.* Об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем с запаздыванием // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53. № 3. С. 495-508.

7. *Подвальный С.Л., Васильев Е.М.* Модели многоальтернативного управления и принятия решений в сложных системах // Системы управления и информационные технологии. 2014. Т. 56. № 2.1. С. 169-173.

8. *Подвальный С.Л., Провоторов В.В.* Оптимизационные задачи для эволюционных систем с распределенными параметрами на графе // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2014), сборник трудов VII международной конференции, Воронеж, 14-21 сентября 2014, Воронеж, 2014. С 282-286.

9. *Подвальный С.Л.* Особенности поисковой градиентной оптимизации сложных объектов с использованием сопряженных систем // Системы управления и информационные технологии. 2014. Т. 56. № 2. С. 18-22

10. *Podval'ny S.L., Ledeneva T.M.* Intelligent Modeling Systems: Design Principles // Automation and Remote Control. 2013. V. 74. № 7. P. 1201-1210.

Поступила в редакцию 31 мая 2015 г.

Podval'ny S.L., Provotorov V.V. BOUNDARY CONTROL OF DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS ON THE GRAPH

For a differential system which state is described by a parabolic initial boundary value problem with distributed parameters on the graph, we consider the problem of boundary control in the class of generalized solutions. At the same time control and observation are also boundary, we obtain the conditions for the existence of a single control and relations which characterize the controls.

Key words: differential system with distributed parameters on the graph; generalized solutions; boundary control; boundary observation.

Подвальный Семен Леонидович, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой автоматизированных и вычислительных систем, e-mail: spodvalny@yandex.ru

Podval'ny Simon Leonidovich, Voronezh State Technical University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Techniques, Professor, the Head of the Automated and Computer Systems Department, e-mail: spodvalny@yandex.ru

Провоторов Вячеслав Васильевич, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, e-mail: wwprov@mail.ru

Provotorov Vjacheslav Vasil'evich, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Partial Differential Equations and Probability Theory Department, e-mail: wwprov@mail.ru