Krupennikov Evgenii Aleksandrovich, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, the Russian Federation, Post-graduate Student, e-mail: krupennikov@imm.uran.ru

УДК 517.929

ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕАВТОНОМНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

© **А.Ю. Куликов**

Ключевые слова: разностные уравнения; устойчивость; признаки устойчивости; функция Коши.

Для разностного уравнения с ограниченными запаздываниями получены новые эффективные достаточные признаки устойчивости, выраженные в терминах оценок его функции Коши.

Обозначим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant m\}$, $\Delta = \{(n,m) \in \mathbb{N}_0^2 : n \geqslant m\}$, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $[n_1,n_2] = \big\{n \in \mathbb{Z} : n_1 \leqslant n \leqslant n_2\big\}$, если $n_1 > n_2$, то $[n_1,n_2] = \varnothing$.

Настоящая работа посвящена исследованию устойчивости разностного уравнения вида

$$x(n+1) = ax(n) - \sum_{k=1}^{N} b_k(n)x(n-h_k(n)), \quad n \in \mathbb{N}_m, \tag{1}$$

где $0 < a < 1$, $b_k : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+$, $h_k : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$.

Положим $b(n) = \sum\limits_{k=1}^{N} b_k(n)$ при $n \in \mathbb{N}_0$, $b(n) = 0$ при $n \notin \mathbb{N}_0$, $h(n) = \max\limits_{k\in[1,N]} h_k(n)$. Обозначим $H = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} h(n)$ и потребуем выполнения условия $0 < H < \infty$.

Функцию x будем доопределять *начальной функцией* $\xi : \{n \in \mathbb{Z}, n \leqslant m\} \to \mathbb{R}$, а *решением уравнения* (1) будем называть функцию, $x : \mathbb{N}_m \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую ему при всех $n \in \mathbb{N}_m$.

Отказ от постоянства параметров уравнения практически исключает возможность получить необходимые и достаточные признаки устойчивости и делает неприменимым хорошо разработанный аппарат исследования устойчивости автономных уравнений, основанный на опредлении расположения корней соответствующего уравнению характеристического полинома. Поэтому работы, посвященные исследованию устойчивости неавтономных разностных уравнений, опираются на принципиально иные подходы. В частности, в последние десятилетия многие авторы стали рассматривать разностное уравнение как аналог функционально-дифференциального уравнения (ФДУ) с сосредоточенными запаздываниями и применять для его изучения идеи и методы, разработанные в интенсивно развивающейся теории устойчивости ФДУ.

В работах [1–3] для разностного уравнения с запаздываниями были получены аналоги известных в теории ФДУ *неулучшаемых достаточных* признаков устойчивости — так называемых « 3/2 -теорем» [4, 5]. Дальнейшие исследования показали, что разностные уравнения проявляют свою «дискретную природу» и константа $3/2$ в признаках устойчивости может быть увеличена, причем это увеличение зависит от максимальной величины запаздывания H [6, 7].

У т в е р ж д е н и е 1. *Пусть* $a = 1$ *и* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \sum\limits_{i=n-h(n)}^{n} b(i) \leqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{2H+2}$. *Тогда уравнение* (1) *равномерно устойчиво.*

У т в е р ж д е н и е 2. *Пусть* $a = 1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b(n) = \infty$ *и* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sum\limits_{i=n-h(n)}^{n} b(i) < \frac{3}{2} + \frac{1}{2H+2}$. *Тогда уравнение* (1) *асимптотически устойчиво.*

Приведенные признаки устойчивости являются точными: в утверждении 1 константу $\frac{3}{2} + \frac{1}{2H+2}$ нельзя увеличить ни на какую, сколь угодно малую величину, а в утверждении 2 строгое неравенство нельзя заменить нестрогим [8]. Целью настоящей работы является обобщение обоих результатов на случай $0 < a < 1$.

Понятно, что в рассматриваемом нами случае уравнение (1) можно переписать в виде

$$x(n+1) = x(n) - \sum_{k=0}^{N} b_k(n)x(n-h_k(n)), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

где $b_0(n) \equiv 1 - a$, $h_0(n) \equiv 0$ и, применив утверждения 1 и 2, сразу получить эффективные признаки устойчивости. Например, пользуясь признаком 2, получаем, что достаточным для асимптотической устойчивости уравнения (1) является выполнение условия $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sum\limits_{i=n-h(n)}^{n} b(i) < \frac{1}{2} + a + \frac{1}{2H+2}$. Однако, в признаках 1 и 2 все запаздывания уравнения подчинены общей оценке $h_k(n) \leqslant H$, $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in [0, N]$. Таким образом, условие $h_0(n) \equiv 0 < H$ никак не использовано.

1. Основные результаты

Функция $K : \Delta \to \mathbb{R}$, которая при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}_0$ является решением начальной задачи

$$\begin{cases} K(n+1,m) = aK(n,m) - \sum\limits_{k=0}^{N} b_k(n)K(n-h_k(n),m), \quad n \geqslant m, \\ K(m,m) = 1, \quad K(n,m) = 0, \quad n < m, \end{cases}$$

называется *функцией Коши* [9, 10] уравнения (1). Она является основным объектом исследования при изучении его асимптотических свойств. В работе [11] показано, что при выполнении условия $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \sum\limits_{i=n-h(n)}^{n} b(i) < \infty$ признаки устойчивости уравнения (1) можно выражать в терминах оценок функции Коши.

Положим $V = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \sum\limits_{i=n-H}^{n} b(i)$. Построим многочлены $P_j(a)$, $j \in [0, H+1]$ по правилу: $P_0(a) \equiv 0$, $P_1(a) \equiv 1$, $P_{j+1}(a) = 2P_j(a) - aP_{j-1}(a)$. Приведем несколько первых таких многочленов: $P_2(a) = 2$, $P_3(a) = 4 - a$, $P_4(a) = 8 - 4a$, $P_5(a) = 16 - 12a + a^2$.

З а м е ч а н и е 1. Многочлены P_n могут быть выражены через многочлены Чебышева:

$$P_{n+1}(a) = U_n(a^{-1/2})a^{n/2} = \frac{(1+\sqrt{1-a})^{n+1} - (1-\sqrt{1-a})^{n+1}}{2\sqrt{1-a}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

где U_n — многочлены Чебышева второго рода.

Введем функцию Ψ, положив

$$\Psi(a,H) = \min_{i\in[0,H]} \left(\frac{1}{a^i} + a^{H+1} - \frac{a^{2H+2-i}P_i(a)}{2P_{i+1}(a)} \right).$$

Очевидно, что при всех $a \in (0,1)$ и при любых $H \geqslant 1$ имеем $\Psi(a,H) > \frac{1}{2} + a + \frac{1}{2H+2}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $V \leqslant \Psi(a,H)$. *Тогда найдется* $M > 0$ *такое, что при всех* $(n,m) \in \Delta$ *выполнена оценка* $|K(n,m)| \leqslant M$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $V < \Psi(a,H)$. *Тогда найдутся* $M, \gamma > 0$ *такие, что при всех* $(n,m) \in \Delta$ *выполнена оценка* $|K(n,m)| \leqslant M \exp(-\gamma(n-m))$.

На рисунке 1 слева изображены графики функций $\frac{1}{a^i} + a^{H+1} - \frac{a^{2H+2-i}P_i(a)}{2P_{i+1}(a)}$, а справа соответствующий им график функции $\Psi(a,H)$ при $H = 7$, а на рисунке 2 изображена область устойчивости в пространстве параметров a, V при $H = 7$ на отрезке $a \in [0.5, 1)$.

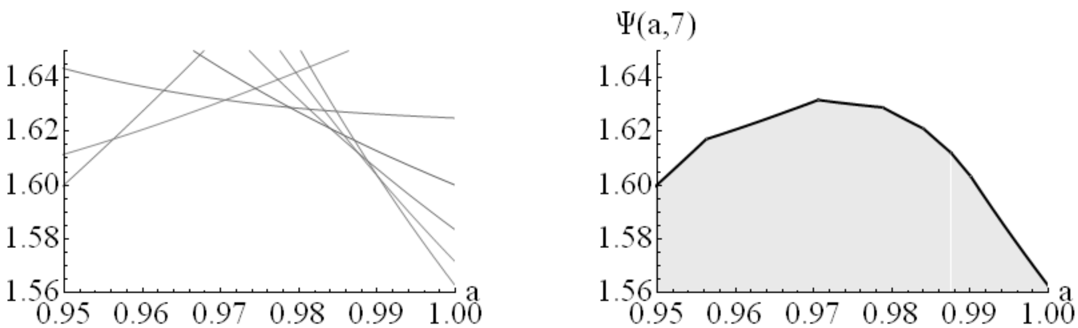

Рис. 1. Построение области устойчивости уравнения при $H = 7$.

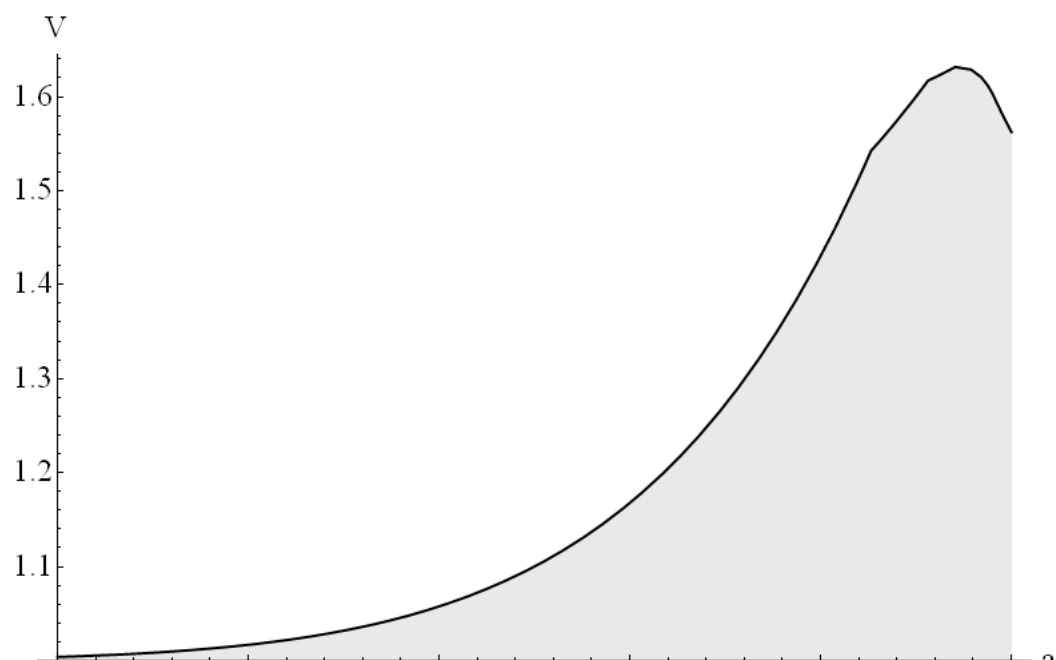

Рис. 2. Область устойчивости уравнения при $H = 7$.

Заметим, что при любом H имеем $\lim\limits_{a \to 1} \Psi(a,H) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2H+2}$, т. е. можно сказать, что в пределе при $a \to 1$ теоремы 1 и 2 переходят в утверждения, очень близкие к утверждениям 1 и 2. Однако, выполнение условий теоремы 1 обеспечивает экспоненциальную оценку функции Коши уравнения (1), в то время как выполнение условий утверждения 2 гарантирует лишь асимптотическую устойчивость этого уравнения.

2. Доказательство теорем

2.1. Вспомогательные многочлены P и Q

Построим многочлены $Q_j(a)$, $j \in [0, H]$ по правилу: $Q_0(a) \equiv 1$, $Q_1(a) \equiv 1$, $Q_{j+1}(a) = 2Q_j(a) - aQ_{j-1}(a)$.

З а м е ч а н и е 2. Многочлены Q_n могут быть выражены через многочлены Чебышева:

$$Q_n(a) = T_n(a^{-1/2})a^{n/2} = \frac{(1+\sqrt{1-a})^n + (1-\sqrt{1-a})^n}{2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где T_n — многочлены Чебышева первого рода.

Л е м м а 1. *При всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство*

$$P_{n+1}(a) = Q_n(a) + P_n(a). \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем утверждение леммы индукцией по $n \in \mathbb{N}$. При $n = 0$ имеем $P_1(a) = 1 = Q_0(a) + P_0(a)$ и при $n = 1$ имеем $P_2(a) = 2 = Q_1(a) + P_1(a)$. Предположим, что (2) выполнено при $m = n - 1$ и при $m = n$. Тогда

$$P_{n+2}(a) = 2P_{n+1}(a) - aP_n(a) = 2(P_n(a) + Q_n(a)) - a(P_{n-1}(a) + Q_{n-1}(a)) = P_{n+1} + Q_{n+1}.$$

Лемма доказана.

Л е м м а 2. *При всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство*

$$\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i}Q_i(a) + 2Q_n(a) = P_{n+1}(a). \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем лемму индукцией по $n \in \mathbb{N}$. При $n = 1$ равенство (3) выполнено: $2Q_1(a) = 2 = P_2(a)$. Пусть доказываемое равенство имеет место при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда, в силу леммы 1 имеем

$$\sum_{i=1}^{n} a^{n+1-i}Q_i(a) + 2Q_{n+1}(a) = a\left(\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i}Q_i(a) + 2Q_n(a)\right) + 2Q_{n+1}(a) - aQ_n(a) =$$
$$= aP_{n+1}(a) + Q_{n+2}(a) = 2P_{n+2}(a) - P_{n+3}(a) + Q_{n+2}(a) = P_{n+2}(a).$$

Лемма доказана.

Л е м м а 3. *При всех $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $k \in [1, n-1]$ имеет место равенство*

$$\sum_{i=1}^{k-1} a^{k-i}Q_i(a) + 2Q_k(a) + \sum_{i=k+1}^{n} Q_i(a) = P_{n+1}(a). \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим индукцию по $n \in \mathbb{N}$. При $n = 2$, $k = 1$ равенство (4) выполнено: $2Q_1(a) + Q_2(a) = 4 - a = P_3(a)$. Пусть доказываемое равенство имеет место при некотором $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ и всех $k \in [1, n-1]$. Тогда при всех $k \in [1, n]$, с учетом (2) и (3), имеем

$$\sum_{i=1}^{k-1} a^{k-i}Q_i(a) + 2Q_k(a) + \sum_{i=k+1}^{n+1} Q_i(a) = P_{n+1}(a) + Q_{n+1}(a) = P_{n+2}(a).$$

Лемма доказана.

Л е м м а 4. *При всех* $n \in \mathbb{N}$ *имеет место равенство*

$$\sum_{i=1}^{n} a^{n-i} Q_i(a) P_i(a) = \frac{P_n(a) P_{n+1}(a)}{2}. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем лемму индукцией по $n \in \mathbb{N}$. При $n = 1$ равенство (5) выполнено: $Q_1(a)P_1(a) = 1 = P_1(a)P_2(a)/2$. Предположим, что (5) выполнено при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда, используя (2), имеем

$$\sum_{i=1}^{n+1} a^{n+1-i} Q_i(a) P_i(a) = a \sum_{i=1}^{n} a^{n-i} Q_i(a) P_i(a) + P_{n+1}(a) Q_{n+1}(a) =$$
$$= \frac{P_{n+1}(a)(aP_n(a) + 2P_{n+2}(a) - 2P_{n+1}(a))}{2} = \frac{P_{n+1}(a) P_{n+2}(a)}{2}.$$

Лемма доказана.

2.2. Функция $T(a, H, V)$

Пусть a, V, H фиксированы, $n \in [0, H]$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$. Введем функции $G_n^{a,V,H} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по правилу

$$G_n^{a,V,H}(\mathbf{p}) = G_n(\mathbf{p}) = a^{n+H+1} - a^n V - a^{n+1} \sum_{i=1}^{n} a^{H-i} p_i + \sum_{i=1}^{n} a^{n-i} p_i \sum_{j=i}^{n} p_j.$$

Л е м м а 5. *Имеет место оценка*

$$G_n(\mathbf{p}) \geqslant a^{n+H+1} - a^n V - \frac{a^{2H+2} P_n(a)}{2P_{n+1}(a)}. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 0$ оценка очевидна. При $n > 0$ функция G_n есть положительно определенная квадратичная форма, имеющая во всем $\mathbb{R}^n$ единственную точку минимума $\mathbf{p}^* = (p_1^*, ... p_n^*)$, координаты которой удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{k-1} a^{k-i} p_i + 2p_k + \sum_{i=k+1}^{n} p_i = a^{H+1}, \quad k \in [1, n].$$

В силу лемм 2 и 3 решение этой системы имеет вид $p_i^* = \frac{a^{H+1} Q_i(a)}{P_{n+1}(a)}$, $i \in [1, n]$.

Заметив, что в силу леммы 3 имеет место равенство

$$\sum_{j=i}^{n} Q_j(a) = 2Q_1(a) + \sum_{j=2}^{n} Q_j(a) - 2Q_1(a) - \sum_{j=2}^{i-1} Q_j(a) = P_{n+1}(a) - P_i(a)$$

и используя лемму 4, найдем значение $G_n(\mathbf{p}^*)$:

$$G_n(\mathbf{p}^*) = a^{n+H+1} - a^n V - \frac{a^{H+n+2}\sum\limits_{i=1}^{n} a^{H-i} Q_i(a)}{P_{n+1}(a)} + \frac{a^{2H+2}\sum\limits_{i=1}^{n} a^{n-i} Q_i(a) \sum\limits_{j=i}^{n} Q_j(a)}{P_{n+1}^2(a)} =$$

$$= a^{n+H+1} - a^n V - \frac{a^{2H+2}}{P_{n+1}(a)}\left(\sum_{i=1}^{n} a^{n-i} Q_i(a) - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a^{n-i} Q_i(a)(P_{n+1}(a) - P_i(a))}{P_{n+1}(a)}\right) =$$

$$= a^{n+H+1} - a^n V - \frac{a^{2H+2} P_n(a)}{2P_{n+1}(a)}.$$

Лемма доказана.

Введем функцию $T(a,H,V)$, положив

$$T(a,H,V) = \max\left\{a, \max_{i\in[0,H]}\left\{a^i V - a^{i+H+1} + \frac{a^{2H+2} P_i(a)}{2P_{i+1}(a)}\right\}\right\}.$$

Л е м м а 6. *При всех* $H^* \in [0,H]$ *и* $n \in [0,H^*]$ *выполнено неравенство*

$$G_n^{a,H^*,V}(\mathbf{p}) \geqslant -T(a,H,V). \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что при всех $n \in \mathbb{N}_0$ имеем $\frac{P_n(a)}{P_{n+1}(a)} < 1$. Поэтому при всех $i \in [0,H^*]$ выполнено неравенство

$$G_n^{a,H^*,V}(\mathbf{p}) \geqslant a^{n+H^*+1} - a^n V - \frac{a^{2H^*+2} P_n(a)}{2P_{n+1}(a)} \geqslant a^{n+H+1} - a^n V - \frac{a^{2H+2} P_n(a)}{2P_{n+1}(a)},$$

т. е. $G_n^{a,H^*,V}(\mathbf{p}) \geqslant G_n^{a,H,V}(\mathbf{p})$. Отсюда, по определению функции T с учетом леммы 5 получаем требуемую оценку. Лемма доказана.

2.3. Поведение решения после смены знака

Пусть в некоторой точке решение уравнения (1) x меняет знак и далее на некотором отрезке сохраняет знак. Мы хотим оценить сверху максимум модуля значений x на этом отрезке. Очевидно, достаточно изучить поведение функции x на отрезке, длина которого равна величине максимального запаздывания, т. к. далее, в случае сохранения знака, она убывает по модулю. Заметим, что длина отрезка, на котором функция x сохраняет знак, может оказаться и меньшей, однако, без ограничения общности, будем считать ее равной H . Также можно считать, что решение изменило знак с плюса на минус.

Итак, ниже в этом пункте всегда считаем, что в некоторой точке n_0 имеем $x(n_0) > 0$ и $x(n) \leqslant 0$ при всех $n \in [n_0{+}1, n_0{+}H]$. Кроме того, пусть $x(n) \leqslant 1$ при всех $n \in [n_0{-}2H, n_0]$.

Грубую оценку значений решения можно получить немедленно.

Л е м м а 7. *При любом* $n \in [1, H+1]$ *выполнено неравенство*

$$\min\{x(j) : j \in [n_0+1, n_0+n]\} \geqslant a x(n_0) - \sum_{i=0}^{n-1} b(n_0+i). \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем неравенство (8) индукцией по $n \in [1, H]$. При $n = 1$ неравенство выполнено: $x(n_0+1) = ax(n_0) - \sum\limits_{k=1}^{N} b_k(n_0)x(n_0 - h_k(n_0)) \geqslant ax(n_0) - b(n_0)$. Пусть (8) выполнено при некотором $n \in [1, H]$, учитывая неположительность $x(n_0 + n)$, имеем

$$x(n_0 + n + 1) = ax(n_0 + n) - \sum_{k=1}^{N} b_k(n_0 + n)x(n_0 + n - h_k(n_0 + n)) \geqslant$$
$$\geqslant x(n_0 + n) - b(n_0 + n) \geqslant ax(n_0) - \sum_{i=0}^{n} b(n_0 + i).$$

Следовательно

$$\min\{x(j) : j \in [n_0 + 1, n_0 + n + 1]\} \geqslant ax(n_0) - \sum_{i=0}^{n} b(n_0 + i).$$

Лемма доказана.

Поведение решения на отрезке $[n_0 + 1, \mu(n_0) + 1]$ может зависеть от значений решения в точках отрезка $[v(n_0), n_0]$. Введем характеристику поведения решения на этом отрезке следующим образом.

Зададим на отрезке $[-H_1, 0]$ вещественную функцию z:

$$z(0) = x(n_0),$$
$$z(i) = \max\left\{\frac{z(i+1)}{a}, x(n_0 + i)\right\}, \quad i \in [-1, -H].$$

Заметим, что при всех $n \in [0, H - 1]$ выполнено неравенство

$$z(n - H) \geqslant az(n - H + 1). \tag{9}$$

Кроме того, имеем $z(n) \geqslant x(n_0 + n)$ и, более того, $z(n) \geqslant \max\{x(j) : j \in [n_0 + n, n_0]\}$ при всех $n \in [-H, 0]$. Отсюда получаем следующую оценку

$$z(n - H) \geqslant \max\{x(j) : j \in [n_0 + n - H, n_0]\}, \quad n \in [0, H]. \tag{10}$$

Положим $\alpha_n = az(n) - z(n + 1), \quad n \in [-H, -1].$

Л е м м а 8. *При всех* $n \in [-H, -1]$ *выполнено неравенство*

$$\alpha_n \leqslant b(n_0 + n). \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\alpha_n = 0$, то неравенство выполнено. Если же $\alpha_n > 0$, то $\max\{z(n + 1), ax(n_0 + n)\} = az(n) > z(n+1)$. Следовательно, $z(n) = x(n_0+n)$. Учитывая, что $z(n + 1) \geqslant x(n_0 + n + 1)$ имеем

$$\alpha_n \leqslant ax(n_0 + n) - x(n_0 + n + 1) = \sum_{k=1}^{N} b_k(n_0 + n)x(n_0 + n - h_k(n_0 + n)) \leqslant b(n_0 + n).$$

Лемма доказана.

Функция z монотонно убывает на отрезке $[-H, 0]$. Возможны два принципиально различных случая.

Случай 1, когда $z(-H) \leqslant 1$. В этом случае положим $L = 0$, $\delta = \varphi_{-H}$.
Случай 2, когда $z(-H) > 1$. В этом случае найдем $G : H > G \geqslant 0$ такое, что $z(-H) \leqslant 1$ и положим $L = H - G$, $\delta = 1$.

Обозначим $\beta_0 = \sum\limits_{i=0}^{L} b(n_0 + i)$, а при всех $n \in [L+1, H]$ положим $\beta_n = b(n_0 + n)$.

Зададим на отрезке $[L+1, H+1]$ вещественную функцию y_* следующим образом. Положим $y_*(L+1) = az(0) - \delta\beta_0$. Затем при $n \in [L+1, H]$ положим

$$y_*(n+1) = ay_*(n) - \beta_n z(n-H).$$

Л е м м а 9. *Имеет место оценки:*

- $\min\{x(j) : j \in [n_0+1, n_0+L+1]\} \geqslant y_*(L+1)$ *;*
- $x(n_0+n) \geqslant y_*(n)$ *при всех* $n \in [L+1, H+1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем вторую оценку индукцией по $n \in [L+1, H]$. Базой индукции является первая оценка, которая очевидно вытекает из леммы 7. Пусть $x(n_0+n) \geqslant y_*(n)$ при некотором $n \in [L+1, H]$. В силу неравенства (10) имеем $x(n_0 + n - h_k(n_0+n)) \leqslant z(n-H)$ при всех $k \in [1, N]$. Следовательно,

$$x(n_0+n+1) = ax(n_0+n) - \sum_{k=1}^{N} b_k(n_0+n)x(n_0+n-h_k(n_0+n)) \geqslant$$
$$\geqslant ax(n_0+n) - b(n_0+n)z(n-H) = y_*(n+1).$$

Лемма доказана.

Обозначим $V = \max\{\sum\limits_{i=n-H}^{n} b(i) : n \in [n_0, n_0+H]\}$. Положим $\alpha_0 = V - \sum\limits_{i=-H+L}^{-1} \alpha_i$, а при всех $n \in [L+1, H]$ положим $\alpha_n = \alpha_{n-H-1}$. Имеем также

$$\alpha_0 = V - \sum_{i=-H+L}^{-1} \alpha_{i+H+1} = V - \sum_{i=L+1}^{H} \alpha_i. \tag{12}$$

В силу (11) имеем

$$\beta_0 = \sum_{i=0}^{L} b(n_0+i) \leqslant \sum_{i=-H+L}^{L} b(n_0+i) - \sum_{i=-H+L}^{-1} \alpha_i \leqslant V - \sum_{i=-H+L}^{-1} \alpha_i.$$

Следовательно,

$$\alpha_0 - \beta_0 \geqslant 0. \tag{13}$$

Кроме того, при любом $n \in [L+1, H]$ имеем

$$\sum_{i=n+1}^{H} \alpha_i = \sum_{i=n-H}^{-1} \alpha_{i+H+1} = \sum_{i=n-H}^{-1} \alpha_i \leqslant \sum_{i=n-H}^{-1} b(n_0+n).$$

Учитывая (12), при любом $n \in [L+1, H]$ получаем оценку

$$\sum_{i=n+1}^{H} \alpha_i + \beta_0 + \sum_{i=L+1}^{n} \beta_n \leqslant \sum_{i=n-H}^{n} b(n_0+n) \leqslant V = \alpha_0 + \sum_{i=L+1}^{H} \alpha_i,$$

следовательно,

$$\alpha_0 - \beta_0 + \sum_{i=L+1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \geqslant 0, \quad n \in [L+1, H+1]. \tag{14}$$

Зададим на отрезке $[L+1, H+1]$ вещественную функцию y следующим образом. Положим $y(L+1) = az(0) - \delta\alpha_0$. Затем, при $n \in [L+1, H]$ положим

$$y(n+1) = ay(n) - \alpha_n z(n-H).$$

Л е м м а 10. *Имеет место оценки:*

- $\min\{x(j) : j \in [n_0+1, n_0+L+1]\} \geqslant y(L+1)$ *;*
- $x(n_0+n) \geqslant y(n)$ *при всех* $n \in [L+1, H+1]$ *.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая предыдущую лемму, достаточно доказать, что всех $n \in [L+1, H+1]$ выполнено неравенство $y_*(n) \geqslant y(n)$. В силу (13) сразу имеем

$$y_*(L+1) - y(L+1) = \delta(\alpha_0 - \beta_0) \geqslant 0.$$

Заметим, что при $L = 0$ имеем $\delta a = az(-H) \geqslant z(-H+1)$, а при $L > 0$ имеем $\delta a = a > z(L-H+1)$. Таким образом, каково бы ни было $L \in [0, H]$ имеем

$$a(y_*(L+1) - y(L+1)) \geqslant z(L-H+1)(\alpha_0 - \beta_0). \tag{15}$$

Докажем индукцией по $n \in [L+2, H]$, что при всех $n \in [L+2, H+1]$ выполнена оценка

$$y_*(L+n) - y(L+n) \geqslant \left(\alpha_0 - \beta_0 + \sum_{i=L+1}^{L+n-1} (\alpha_i - \beta_1)\right) z(L-H+n-1), \tag{16}$$

которая, в силу (14) обеспечивает утверждение леммы. При $n = L+2$ имеем

$$y_*(L+2) - y(L+2) = a(y_*(L+1) - y(L+1)) + (\alpha_{L+1} - \beta_{L+1}) z(L+1-H).$$

Учитывая неравенство (15), получаем $y_*(L+2) - y(L+2) \geqslant z(L-H+1)(\alpha_0 - \beta_0 + \alpha_1 - \beta_1) \geqslant 0$.

Предположив, что неравенство (16) выполнено при некотором $n \in [L+2, H]$ и учитывая неравенство (9), получаем

$$\begin{aligned} y_*(L+n+1) - y(L+n+1) = a(y_*(L+n) - y(L+n)) - (\alpha_{L+n} - \beta_{L+n}) z(L-H+n) \geqslant \\ \geqslant a\left(\alpha_0 - \beta_0 + \sum_{i=L+1}^{L+n-1} (\alpha_i - \beta_1)\right) z(L-H+n-1) - (\alpha_{L+n} - \beta_{L+n}) z(L-H+n) \geqslant \\ \geqslant \left(\alpha_0 - \beta_0 + \sum_{i=L+1}^{L+n} (\alpha_i - \beta_1)\right) z(L-H+n). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теперь уже можно доказать основной результат данного пункта.

Л е м м а 11. *Пусть* $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *,* $n_0 \geqslant m + 2H$ *и функция* x *удовлетворяет следующим условиям:*

- $x(n) \leqslant 1$ *при* $n \in [n_0 - 2H, n_0]$ *;*
- $x(n_0) > 0$ *;*

- $x(n) \leqslant 0$ *при* $n \in [n_0+1, n_1]$.

Тогда при всех $n \in [n_0+1, n_1+1]$ *выполнено неравенство* $x(n) \geqslant -T(a,V,H)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности считаем, что $n_1 = H$. То есть надо доказать, что при всех $n \in [1, H+1]$ выполнено неравенство $x(n_0+n) \geqslant -T(a,V,H)$.

Учитывая предыдущую лемму, достаточно доказать, что всех $n \in [1, H-L+1]$ выполнено неравенство $y(L+n) \geqslant -T(a,V,H)$. Положим $\gamma = z(-H+L)$. Вычисляя последовательно $z(L-H+1), z(L-H+2), ..., z(0)$, получаем

$$z(n) = a^{n+H-L}\gamma - \sum_{i=L+1}^{n+H} a^{n+H-i}\alpha_i, \quad n \in [L-H, 0].$$

В дальнейшем считаем, что $n \in [1, H-L+1]$. Вычисляя последовательно $y(L+1)$, $y(L+2)$, ..., $y(H+1)$, находим

$$y(L+n) = \gamma a^{H-L+n} - \delta a^{n-1}V + \delta a^{n-1}\sum_{i=L+1}^{H}\alpha_i - a^n \sum_{i=L+1}^{H} a^{H-i}\alpha_i -$$
$$- \gamma a^{n-1}\sum_{i=L+1}^{L+n-1}\alpha_i + \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-1-i}\alpha_{L+i}\sum_{j=i}^{n-1}\alpha_{L+j}.$$

Положив $p_i = \alpha_{L+i}$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_{n-1})$, $S = -\delta a^{n-1}V + \sum\limits_{i=1}^{n-1} a^{n-1-i}p_i \sum\limits_{j=i}^{n-1} p_j$, имеем

$$y(L+n) = S + \gamma a^{H-L+n} + \delta a^{n-1}\sum_{i=1}^{H-L} p_i - a^n \sum_{i=1}^{H-L} a^{H-L-i}p_i - \gamma a^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} p_i.$$

Рассмотрим случай $L > 0$. Тогда $\delta = 1$. При $\gamma = a$, положив $H^* = H - L + 1$, получаем

$$y(L+n) = S + a^{H^*+n} + a^{n-1}\sum_{i=1}^{H^*-1} p_i - a^{n-1}\sum_{i=1}^{H^*-1} a^{H^*-i}p_i - a^n \sum_{i=1}^{n-1} p_i =$$
$$= G_{n-1}^{a,H^*,V}(\mathbf{p}) + a^n \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i}p_i + a^{n-1}\sum_{i=1}^{H^*-1} p_i - a^{n-1}\sum_{i=1}^{H^*-1} a^{H^*-i}p_i - a^n\sum_{i=1}^{n-1} p_i =$$
$$= G_{n-1}^{a,H^*,V}(\mathbf{p}) + a^{n-1}\left(\sum_{i=n}^{H^*-1} p_i - \sum_{i=n}^{H^*-1} a^{H^*-i}p_i\right) + a^{n-1}(1-a)\left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i - \sum_{i=1}^{n-1} a^{H^*-i}p_i\right).$$

Два последних слагаемых в приведенном представлении неотрицательны, поэтому в силу леммы 6 имеем

$$y(L+n) \geqslant G_{n-1}^{a,H^*,V}(\mathbf{p}) \geqslant -T(a,H,V).$$

При $\gamma = 1$, положив $H^* = H - L$, имеем

$$y(L+n) = S + a^{H^*+n} + a^{n-1}\sum_{i=n}^{H^*} p_i - a^n \sum_{i=1}^{H^*} a^{H^*-i}p_i =$$
$$= G_{n-1}^{a,H^*,V}(\mathbf{p}) + a^{n-1}\left(\sum_{i=n}^{H^*} p_i - \sum_{i=n}^{H^*} a^{H^*-i}p_i\right).$$

Второе слагаемое в данной формуле неотрицательно, поэтому снова

$$y(L+n) \geqslant G_{n-1}^{a,H^*,V}(\mathbf{p}) \geqslant -T(a,H,V).$$

Так как $y(L+n)$ линейно зависит от γ, то и при всех $\gamma \in (a,1)$ получаем оценку $y(L+n) \geqslant -T(a,H,V)$.
Рассмотрим теперь случай, когда $L=0$. Учитывая, что $\delta = z(-H) = \gamma$, получаем

$$y(n) = a^{n-1}(a^{H+1}\gamma - \gamma V + \gamma \sum_{i=n}^{H} p_i) - a^n \sum_{i=1}^{H} a^{H-i} p_i + \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-1-i} p_i \sum_{j=i}^{n-1} p_j.$$

Правая часть неравенства зависит от γ линейно. При $\gamma = 0$ имеем

$$y(n) \geqslant -a^n \sum_{i=1}^{H} a^{H-i} p_i \geqslant -a \geqslant -T(a,V,H).$$

При $\gamma = 1$, получаем

$$y(n) \geqslant S + a^{n+H} - a^n \sum_{i=1}^{n-1} a^{H-i} p_i = G_{n-1}^{a,H,V}(\mathbf{p}) \geqslant -T(a,H,V).$$

Значит и при любом $\gamma \in (0,1]$ выполнено неравенство $y(n) \geqslant -T(a,V,H)$, $n \in [1, H+1]$.
Лемма доказана.

2.4. Завершение доказательства теорем

Л е м м а 12. *Пусть* $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $n_0 \geqslant m + 2H$ *и функция* x *удовлетворяет следующим условиям:*

- $|x(n)| \leqslant M$ *при* $n \in [n_0 - 2H, n_0]$;
- $x(n_0)x(n_0+1) < 0$.

Тогда $x(n_0+1) \leqslant MT(a,H,V)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что утверждение леммы неверно, т. е. $|x(n_0+1)| > MT(a,H,V)$.

Положим $S = -M$, если $x(n_0+1) > 0$, $S = M$, если $x(n_0+1) < 0$. Рассмотрим для уравнения (1) начальную задачу с начальной функцией ξ/S.

Возьмем $n_1 = n_0 + 1$. В силу линейности уравнения (1) имеем:

- $x^*(n) \leqslant 1$ при $n \in [n_0 - 2H, n_0]$;
- $x^*(n_0) > 0$;
- $x^*(n) < 0$ при $n \in [n_0+1, n_1]$.

Однако, $x^*(n_1) < -T(a,H,V)$, что противоречит лемме 11. Лемма доказана.

Л е м м а 13. *Пусть* $T(a,H,V) \leqslant 1$, $n_* \in \mathbb{N}_0$, $n_* \geqslant m+3H$ *и решение* x *удовлетворяет следующим условиям:*

- $|x(n)| \leqslant 1$ *при* $n \in [n_* - 3H, n_* - 1]$;
- $|x(n_*)| \leqslant T(a,H,V)$.

Тогда при любом $n \geqslant n_*$ *справедливо неравенство* $|x(n)| \leqslant T(a,H,V)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что лемма неверна. Тогда существует точка $n_1 > n_*$ такая, что $|x(n_1)| > T(a,H,V)$, причем $|x(n)| \leqslant T(a,H,V)$ при $n \in [n_*, n_1-1]$.

Без ограничения общности положим, что $x(n_1) < -T(a,H,V)$. Действительно, если $x(n_1) > T(a,H,V)$, то можно рассмотреть для уравнения (1) начальную задачу с начальной функцией $-\xi$, решение которой обозначим x^* . Функция x^* удовлетворяет условиям доказываемой леммы, при этом, в силу линейности уравнения (1), имеем $x^*(n_1) < -T(a,H,V)$.

Поскольку $x(n_1) < -T(a,H,V) \leqslant x(n_1-1)$, в силу уравнения (1) имеем

$$\sum_{k=0}^{N} b_k x(n_1 - 1 - h_k(n_1-1)) > 0.$$

Это возможно, только если $x(n_1-1-h_k(n_1-1)) > 0$, хотя бы при одном $k \in [0,N]$. При всех $k \in [0,N]$, $n \in \mathbb{N}_0$ выполнено оганичение $h_k(n) \leqslant H$, следовательно, $n_1 - 1 - h_k(n_1-1) \in [n_1 - H - 1, n_1 - 1]$.

Таким образом, найдется хотя бы одна точка $n \in [n_1-H-1, n_1-1]$ такая, что $x(n) > 0$. Пользуясь этим, выберем точку $n_0 \in [n_1 - H, n_1]$ такую, что:

- $x(n_0) > 0$;
- $x(n) \leqslant 0$ при всех $n \in [n_0+1, n_1]$.

Заметим, что $x(n) \leqslant 1$ при всех $n \in [n_* - 3H, n_1]$, а $n_0 - 2H \geqslant n_1 - 3H \geqslant n_* - 3H$, следовательно:

- $x(n) \leqslant 1$ при $n \in [n_0 - 2H, n_0]$.

Итак, выполнены все условия леммы 11, следовательно $x(n_1) \geqslant -T(a,H,V)$. Полученное противоречие доказывает лемму. Лемма доказана.

Л е м м а 14. *Пусть* $T(a,H,V) \leqslant 1$ *,* $n_* \in \mathbb{N}_0$ *,* $n_* \geqslant m+3H$ *и функция* x *удовлетворяет следующим условиям:*

- $|x(n)| \leqslant M$ *при* $n \in [n_* - 3H, n_* - 1]$ *;*
- $|x(n_*)| \leqslant MT(a,H,V).$

Тогда при любом $n \geqslant n_*$ *справедливо неравенство* $|x(n)| \leqslant MT(a,H,V)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что утверждение леммы неверно, т. е. найдется точка $n_1 \geqslant n_*$ такая, что $|x(n_1)| > MT(a,H,V)$.

Рассмотрим начальную задачу для уравнения (1) с начальной функцией ξ/M . В силу линейности уравнения (1), для ее решения x^* имеем:

- при $n \in [n_* - 3H, n_* - 1]$ выполнено неравенство $|x^*(n)| \leqslant 1$;
- $|x^*(n_*)| \leqslant T(a,H,V).$

Однако, $|x^*(n_1)| > T(a,H,V)$, а это противоречит лемме 13. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Условие теоремы очевидно эквивалентно условию $T(a,H,V) \leqslant 1$. Зафиксируем произвольное $m \in \mathbb{N}_0$. В силу определения функции Коши получаем, что при всех $n \in \mathbb{N}_m$ выполнена оценка $|K(n+1,m)| \leqslant (a+V) \max\limits_{i \in [m,n]} |K(i,m)|$.

Положим $n_* = m + 3H$. Зная, что $K(m,m) = 1$ и оценивая последовательно $|K(m+1,m)|$, $|K(m+2,m)|$,..., $|K(n_*,m)|$, получаем

$$\max_{i \in [m,n_*]} |K(n_*,m)| \leqslant (a+V)^{3H}.$$

При каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}_0$ функция Коши является решением начальной задачи для уравнения (1) с начальной функцией $\xi: \ \xi(m) = 1$, $\xi(i) = 0$, $i < m$.

По условиям теоремы $T(a,H,V) \leqslant 1$. Положим $M = (a+V)^{3H}/T(a,H,V)$. При всех $n \in [n_* - 3H, n_* - 1]$ имеем $|K(n,m)| \leqslant M$. Кроме того, $|K(n_*,m)| \leqslant MT(a,H,V)$.

Следовательно, в силу леммы 14 при любом $n \geqslant n_*$ имеем $|K(n,m)| \leqslant MT(a,H,V)$.

Таким образом, при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}_0$ имеем $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}_m} |K(n,m)| \leqslant M$, а значит и $\sup\limits_{(n,m) \in \Delta_{\mathbb{N}}} |K(n,m)| \leqslant M$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Условие теоремы очевидно эквивалентно условию $T(a,H,V) < 1$. Зафиксируем произвольное $m \in \mathbb{N}_0$. Обозначим $T(a,H,V) = L < 1$ и выберем такое $l \in \mathbb{N}$, что $l \geqslant \frac{1-L}{aL} + 4H$. Положим $M_0 = \sup\limits_{(n,m) \in \Delta_{\mathbb{N}}} K|(n,m)|$. В силу теоремы 1 имеем $M_0 < \infty$.

Докажем, что при всех $n \geqslant m + li$, $i \in \mathbb{N}_0$ для функции Коши справедлива оценка

$$|K(n,m)| \leqslant M_0 L^i. \tag{17}$$

Доказательство проведем методом математической индукции. При $i = 0$ неравенство (17) выполнено. Покажем, что если оно выполнено при $n \geqslant m + li$, то при $n \geqslant m + l(i+1)$ справедлива оценка $|K(n,m)| \leqslant M_0 L^{i+1}$.

Достаточно убедиться, что последнее неравенство выполнено хотя бы в одной точке $n_0 \in [m + li + 3H, m + l(i+1)]$. Тогда, в силу леммы 14, оно будет выполнено при всех $n \geqslant n_0$, а значит и при всех $n \geqslant m + l(i+1)$.

Предположим противное, то есть допустим, что $|K(n,m)| > M_0 L^{i+1}$ при всех $n \in [m + li + 3H, m + l(i+1)]$. Тогда, чтобы избежать противоречия с леммой 12, необходимо при всех $n \in [m + li + 3H, m + l(i+1)]$ потребовать выполнения неравенства $K(n,m)K(n-1,m) \geqslant 0$. При этом возможны два случая:

- $K(n,m) > M_0 L^{i+1}$, $n \in [m + li + 3H, m + l(i+1)]$;
- $K(n,m) < -M_0 L^{i+1}$, $n \in [m + li + 3H, m + l(i+1)]$.

Пусть имеет место первый случай, второй рассматривается аналогично. Тогда, заметив, что $K(n - h_k(n), m) > M_0 L^{i+1}$ для всех $n \in [m + li + 4H, m + l(i+1) - 1]$ и для любого $k \in [0, N]$, получаем противоречие:

$$K((m + l(i+1)), m) \leqslant M_0 L^i - a(l - 4H) M_0 L^{i+1} \leqslant$$
$$\leqslant M_0 L^i - a M_0 \frac{1-L}{La} L^{i+1} = M_0 L^{i+1} < K((m + l(i+1)), m).$$

Следовательно найдется точка $n_0 \in [m + li + 3H, m + l(i+1) - 1]$, такая, что $|K(n_0,m)| \leqslant M_0 L^{i+1}$.

Итак, оценка (17) доказана. Покажем, что из нее следует нужная нам экспоненциальная оценка. Положим $\gamma = -\ln(L)/l > 0$, $M = M_0/L$. Для любого $n \in \mathbb{N}_m$ можно найти i такое, что $n \in [m + li, m + l(i+1) - 1]$. Тогда из (17), учитывая что $n - m < l(i+1)$, получаем

$$|K(n,m)| \leqslant M_0 L^i = M \exp(-\gamma l(i+1)) < M \exp(-\gamma(n-m)).$$

Теорема доказана.

3. О точности полученных признаков устойчивости

Рассмотрим частный случай уравнения (1)

$$x(n+1) = ax(n) - b(n)x(n - h(n)), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{18}$$

При достаточно малых a (гарантированно, при $a < 0.86$, а если, например, $H = 7$, то при $a < 0.926$), имеем $\Psi(a,H) = 1 + a^{H+1}$, а при очень близких к 1 (например, если $H = 7$, то при $a > 0.99$), имеем $\Psi(a,H) = \frac{1}{a^H} + a^{H+1} - \frac{a^{H+2}P_H(a)}{2P_{H+1}(a)}$. Покажем, что в этих двух случаях константа $\Psi(a,H)$ в полученных выше признаках устойчивости является точной.

Возьмем произвольное $\varepsilon \geqslant 0$.

В первом случае зададим коэффициенты $b(n)$ и запаздывания $h(n)$ на отрезке $0 \leqslant n \leqslant H$ следующим образом.

$$\begin{cases} h(n) = n, \quad 0 \leqslant n \leqslant H, \\ b(n) = 0, \quad 0 \leqslant n \leqslant H-1, \\ b(H) = \Psi(a,H) + \varepsilon. \end{cases}$$

Далее положим $P = H+1$ и продолжим коэффициенты и запаздывания на все множество $\mathbb{N}_0$ периодически: $h(n+jP) = h(n)$, $b(n+jP) = b(n)$, $j = 1,2,\ldots$.

Во втором случае зададим коэффициенты $b(n)$ и запаздывания $h(n)$ на отрезке $0 \leqslant n \leqslant 2H$ следующим образом.

$$\begin{cases} h(n) = n, \quad 0 \leqslant n \leqslant H \\ h(n) = H, \quad H+1 \leqslant n \leqslant 2H, \\ b(n) = \frac{a^{H+1}Q_{n+1}(a)}{P_{H+1}(a)}, \quad 0 \leqslant n \leqslant H-1, \\ b(H) = \Psi(a,H) - \sum\limits_{i=0}^{H-1} b(i) + \varepsilon, \\ b(n) = \frac{a^{H+1}Q_{n-H}(a)}{P_{H+1}(a)}, \quad H+1 \leqslant n \leqslant 2H. \end{cases}$$

Далее положим $P = 2H+1$ и продолжим коэффициенты и запаздывания на все множество $\mathbb{N}_0$ периодически: $h(n+jP) = h(n)$, $b(n+jP) = b(n)$, $j = 1,2,\ldots$.

В обоих случаях имеем $x(Pj) = (-1)^j(T(a,H,V) + \varepsilon^m) = (-1-\varepsilon^m)^j$.

Таким образом, в обоих случаях при любом $\varepsilon > 0$ для параметров уравнения (18) получаем $V = \Psi(a,H) + \varepsilon$, а решение уравнения неограниченно возрастает, то есть в формулировке теоремы 1 константу $\Psi(a,H)$ нельзя увеличить ни на какую, сколь угодо малую величину. При $\varepsilon = 0$ для параметров уравнения (18) получаем $V = \Psi(a,H)$, а решение уравнения не стремится к нулю, то есть в формулировке теоремы 2 строгое неравенство нельзя заменить нестрогим.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zhang B.G., Tian C.J., Wong P.J.Y.* Global attractivity of difference equation with variable delay // Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems. 1999. № 6. P. 307–317.

2. *Györi I., Hartung F.* Stability in delay perturbed differential and difference equation // Fields Inst. Commun. 2001. № 29. P. 181–194.

3. *Куликов А.Ю., Малыгина В.В.* Об устойчивости неавтономных разностных уравнений с несколькими запаздываниями // Известия вузов. Математика. 2008. № 3. С. 18–26.

4. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.

5. *Малыгина В.В.* Некоторые признаки устойчивости функционально-дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной // Известия вузов. Математика. 1992. № 7. С. 46–53.

6. *Yu J.S.* Asymptotic stability for a linear difference equation with variable delay // Comp. Math. Appl. 1998. V. 36. № 10-12. P. 203–210.

7. *Куликов А.Ю.* Устойчивость линейного неавтономного разностного уравнения с ограниченными запаздываниями // Известия вузов. Математика. 2010. № 11. С. 22–30.

8. *Malygina V.V., Kulikov A.Y.* On precision of constants in some theorems on stability of difference equations // Funct. Diff. Equat. 2008. V. 15. № 3–4. P. 239–248.

9. *Elaydi S.N.* Periodicity and stability of linear Volterra difference systems // J. Math. Anal. Appl. 1994. № 181. P. 483–492.

10. *Berezansky L., Braverman E.* On existence of positive solutions for linear difference equations wits several delays // Adv. Dynam. Systems Appl. 2006. V. 1. № 1. P. 29–47.

11. *Куликов А.Ю., Малыгина В.В.* Устойчивость линейного разностного уравнения и оценки его фундаментального решения // Известия вузов. Математика. 2011. № 12. С. 30—41.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (проект №13–01–96050).

Поступила в редакцию 20 мая 2015 г.

Kulikov A.Yu. STABILITY CONDITIONS OF NONAUTONOMOUS DIFFERENCE EQUATION WITH BOUNDED DELAYS

For the difference equation with bounded delays, new effective sufficient stability conditions expressed in terms of its Cauchy function are obtained.

Key words: difference equations; stability; stability conditions; the Cauchy function.

Куликов Андрей Юрьевич, Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры информационных систем и математических методов в экономике, e-mail: stphn@mail.ru.

Kulikov Andrey Yurevich, Perm State National Research University, Perm, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, e-mail: stphn@mail.ru

УДК 519.853.3+517.983.54

ОБ УСТОЙЧИВОМ ПРИНЦИПЕ ЛАГРАНЖА В ИТЕРАЦИОННОЙ ФОРМЕ В ВЫПУКЛОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

© **Ф.А. Кутерин**

Ключевые слова: принцип Лагранжа; неустойчивость; секвенциальная оптимизация; двойственная регуляризация; итерационный алгоритм.

Обсуждается устойчивый принцип Лагранжа в итерационной форме в задаче выпуклого программирования и его приложение к решению неустойчивых операторных уравнений 1-рода. Приводятся результаты непосредственного численного решения на его основе классической неустойчивой задачи решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода.

Введение. Принцип Лагранжа представляет собою классическое условие оптимальности и является центральным результатом оптимизационной теории в целом и, в частности, теории выпуклого программирования. Его формулировка и доказательство предполагают, прежде всего, что оптимизационная задача рассматривается в идеальной ситуации точного задания исходных данных. Вместе с тем, в громадном числе практически важных задач