УДК 517.254

РЕКУРРЕНТНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАЗНОСТЯМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОМЕХОЙ В ВЫХОДНОМ СИГНАЛЕ

© **Д.В. Иванов, И.Е. Салугин**

Ключевые слова: рекуррентная идентификация; метод наименьших квадратов; разность дробного порядка; модель выходной ошибки; стохастическая аппроксимация.
В работе предложен рекуррентный алгоритм на основе стохастической аппроксимации для оценивания параметров линейных динамических систем с разностями дробного порядка при наличии помехи наблюдения в выходном сигнале. Доказана сильная состоятельность получаемых оценок параметров при ограничениях, не требующих знания закона распределения помех.

В настоящее время активно развиваются методы идентификации динамических систем с разностями дробного порядка [1–3]. Особый интерес представляют рекуррентные методы идентификации, позволяющие получать оценки параметров в реальном масштабе времени. В данной работе предложен алгоритм идентификации линейной динамической системы дробного порядка при наличии помехи в выходном сигнале.

Рассмотрим стационарную линейную динамическую систему, которая описывается следующим стохастическим уравнением заданного порядка с дискретным временем $i = = ..., -1, 0, 1, ...$

$$z_i = \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{m=1}^{r_1} a_0^{(m)} \Delta^{\beta_m} x_i,\ y_i = z_i + \xi_i, \tag{1}$$

где $0 < \alpha_1 \ldots < \alpha_r,\ \ 0 < \beta_1 \ldots < \beta_{r_1}$,

$\Delta^{\alpha_m} z_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \alpha_m \\ j \end{pmatrix} z_{i-j}, \Delta^{\beta_m} x_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_m \\ j \end{pmatrix} x_{i-j},$

$\begin{pmatrix} \alpha_m \\ j \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(\alpha_m+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha_m-j+1)},\ \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt\,.$

z_i, y_i – ненаблюдаемая и наблюдаемая скалярные выходные переменные;

x_i – наблюдаемая скалярная входная переменная;

ξ_i – помеха наблюдения в выходном сигнале;

Предположим, что выполняются следующие условия:

1. Множество $\tilde{\mathrm{B}} \subset \mathbb{R}^{r+r_1}$, которому априорно принадлежат истинные значения параметров b_0, a_0 устойчивой линейной системы, является компактным.

2. Помехи $\{\xi_i\}$ – статистически независимые последовательности, $\{\xi_i\}$ – стационарные в совокупности в узком смысле последовательности независимых случайных векторов с $E\{\xi_i\} = 0,\ E\{\xi_i^2\} = \sigma_\xi^2 > 0,$ и для некоторой постоянной $\pi_\xi :\ |\xi_i| < \pi_\xi$ п.н. (почти наверное), где E – оператор математического ожидания.

3. $\{x_i\}$ статистически не зависят от $\{\xi_i\}$.

4. Входной сигнал x_i является случайным процессом с $E(x_i) = 0$, $E(x_i^2) = \sigma_x^2 < \infty$ и для некоторого $\pi_x > 0:\ |x_i| < \pi_x$ п.н.

Входной сигнал x_i и истинные значения параметров b_0, a_0 удовлетворяют условию

$\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T \Big| \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T \right)^T \left(\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T \Big| \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T \right) = H$ п.н., где $\varphi_z^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ j \end{pmatrix} z_{i-j-1}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \alpha_r \\ j \end{pmatrix} z_{i-j-1} \right)^T$,

$\varphi_x^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_1 \\ j \end{pmatrix} x_{i-j}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_{r_1^{(j)}} \\ j \end{pmatrix} x_{i-j} \right)^T$, T – операция транспонирования матрицы. Причем H – матрица размера $(r+r_1) \times (r+r_1)$ существует, ограничена и положительно определена.

Требуется рекуррентно определять оценки неизвестных коэффициентов динамической системы описываемой уравнением (1) по наблюдаемым последовательностям y_i, x_i.

В [1] показано, что оценки будут сильно состоятельны при следующем критерии:

$$\min_{\theta \in \tilde{\mathrm{B}}} \frac{\lim\limits_{i\to\infty} E\left(y_i - \varphi_i^T \theta\right)^2}{1 + b^T H_\alpha b}, \tag{2}$$

где $\varphi_i = \left(\left(\varphi_y^{(i)}\right)^T \middle| \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T \right)^T$,

$\varphi_y^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ j \end{pmatrix} y_{i-j-1}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \alpha_r \\ j \end{pmatrix} y_{i-j-1} \right)^T$,

$\theta_0 = \left(b_0^T \mid a_0^T \right)^T, b_0 = \left(b_0^{(1)}, \ldots, b_0^{(r)}\right)^T, a_0 = \left(a_0^{(1)}, \ldots, a_0^{(r_1)}\right)^T$,

$$H_\alpha = \left(\begin{array}{c|c|c} h_\alpha^{(11)} & \ldots & h_\alpha^{(r1)} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline h_\alpha^{(1r)} & \ldots & h_\alpha^{(rr)} \end{array} \right), h_\alpha^{(mn)} = \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \begin{pmatrix} \alpha_m \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ j \end{pmatrix} \tfrac{N-j}{N},$$

Тогда, оценки неизвестного вектора $\hat{\theta}$ можно получить с помощью стохастически градиентного алгоритма:

$$\hat{\theta}(i+1) = \hat{\theta}(i) - \delta_i \nabla_\theta \left[\frac{\left(y_{i+1} - \varphi_{i+1}^T \theta(i)\right)^2}{1 + b^T(i) H_\alpha(i) b(i)} \right], \tag{3}$$

где δ_i последовательность, для которой выполняются условия:

5. $\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i = \infty$ и $\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i^l < \infty$ при $l > 1$.

6. $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \xi_i < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \zeta_i < \infty$ п.н.

Т е о р е м а. *Пусть динамическая система описывается уравнениями (1) и выполняются предположения 1–6. Тогда оценки, определяемые алгоритмом (3), либо* $\hat{\theta}(i) \xrightarrow[i\to\infty]{} \theta_0$ *п.н., либо* $\hat{\theta}(i) \xrightarrow[i\to\infty]{} \infty$.

В доказательстве теоремы главную роль играют теоремы 3.15 и 3.17 из [4, с. 113]. Теорема 3.15 доказана Л. Льюнгом в [5] и строгое доказательство теоремы 3.17 получено .

Доказательство построено на основе метода непрерывных моделей [5]. Применение метода непрерывных моделей осуществляется в два этапа:

1. Построение непрерывной модели.

2. Исследование свойств непрерывной модели

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванов Д.В.* Идентификация линейных динамических систем нецелого порядка с помехой в выходном сигнале // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2013. Т. 18. № 5-2. С. 2534-2536.

2. *Иванов Д.В., Кацюба О.А.* О Состоятельности оценок параметров ARX систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале // Стохастическая оптимизация в информатике. 2013. Т. 9. № 2. С. 21-32.

3. *Иванов Д.В.* Оценивание параметров линейных ARX-систем дробного порядка с помехой наблюдения во входном сигнал // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 43-50.

4. *Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л.* Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. М.: Наука, 1991. 215 с.

5. *Ljung L.* Analysis of recursive stochastic algorithm // IEEE Trans. Aut. Control. 1977. V.AC-22. № 4. P. 551-575.

Поступила в редакцию 10 июня 2015 г.

Ivanov D.V., Salugin I.E. RECURSIVE IDENTIFICATION OF LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS OF FRACTIONAL ORDER WITH NOISE OUTPUT SIGNAL

In this paper, we propose a recursive algorithm based on stochastic approximation method for estimating the parameters of linear dynamic systems with differences of fractional order in the presence of noise of observation in the output signal. Prove the strong consistency, the resulting estimates, subject to the constraints that do not require knowledge of the distribution of noise.

Key words: recursive identification; least squares method; the difference of fractional order; model output error; stochastic approximation.

Иванов Дмитрий Владимирович, Самарский государственный университет путей сообщения, г. Самара, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры мехатроники в автоматизированных производствах, e-mail: dvi85@list.ru

Ivanov Dmitrii Vladimirovich, Samara State University of Transport Communications, Samara, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mechatronics in Automated Production Department, e-mail: dvi85@list.ru

Салугин Иван Евгеньевич, Самарский государственный университет путей сообщения, г. Самара, Российская Федерация, аспирант кафедры мехатроники в автоматизированных производствах, e-mail: salugin@yandex.ru

Salugin Ivan Evgenievich, Samara State University of Transport Communications, Samara, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Mechatronics in Automated Production Department, e-mail: salugin@yandex.ru

УДК 517.254

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МНОГОМЕРНЫХ ПО ВХОДУ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАЗНОСТЯМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ НАБЛЮДЕНИЙ

© Д.В. Иванов, И.Р. Ширинов

Ключевые слова: параметрическая идентификация; метод наименьших квадратов; разность дробного порядка; разностные уравнения.

Предложен алгоритм, являющийся обобщением метода наименьших квадратов, который позволяет получать сильно состоятельные оценки параметров линейных динамических систем с разностями дробного порядка при наличии помех наблюдения во входных и выходном сигналах в условиях отсутствия информации о законе распределения помех.