УДК 517.983.36

О СПЕКТРЕ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© **В.М. Тюрин**

Ключевые слова: пространство Соболева-Слободецкого-Степанова; пространство Соболева-Степанова; усиленная эллиптичность; дифференциальный оператор.

Доказано, что резольвентное множество линейного дифференциального оператора в частных производных эллиптического типа в пространствах Соболева-Слободецкого и Соболева-Степанова содержит отрицательную полуось $Re\lambda < \theta,$ при некотором $\theta < 0.$

Пусть X – произвольное банахово пространство; $L^p = L^p(\mathbb{R}^n, X)$ – лебеговы пространства сильно измеримых (по Бохнеру) функций $u : \mathbb{R}^n \to X$ с конечной нормой $||u||_{10}$ $(p > 1, n \in \mathbb{R})$; $H^m = H^m(\mathbb{R}^n, X)$ – пространство Соболева ([1] с. 60; [2] с. 24) с нормой

$$||u||_{1m} = \sum ||D^\alpha u||_{10} < \infty \ (|\alpha| \le m),$$

$u \in H^m,$ $D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/(\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}),$ $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,$ $m \in \mathbb{N} \bigcup \{0\};$ в пространстве Соболева-Слободецкого $H^{1m\gamma} = H^{1m\gamma}(\mathbb{R}^n, X)$ ([3] с. 228) норма определяется равенством $||u||_{1m\gamma} = ||u||_{1m} + \langle u \rangle_{1m\gamma},$ где

$$\langle u \rangle_{1m\gamma} = \sum_{|\alpha| \le m} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{||D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)||^p}{|x-y|^{n+p\gamma}} dxdy \right)^{1/p} < \infty, \quad 0 < y < 1,$$

$H^{10\gamma} = H^{10\gamma}(\mathbb{R}^n, X)$ – пространство функций $u \in L^p,$ норма в котором задается равенством $||u||_{10\gamma} = ||u||_{10} + \langle u \rangle_{10\gamma};$ $M^p = M^p(\mathbb{R}^n, X)$ – пространство Степанова ([4] с. 78) сильно измеримых функций $u : \mathbb{R}^n \to X,$ у которых норма

$$||u||_{20} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{K(x)} ||u(x)||^p dx \right)^{1/p} < \infty,$$

$K(x)$ – единичный куб в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $x;$ W^m – пространство Соболева-Степанова функций $u \in M^p,$ имеющих обобщенные производные $D^\alpha u \in M^p,$ при этом норма элемента $u \in W^m$ задается формулой

$$||u||_{2m} = \sum ||D^\alpha u||_{20} < \infty, (|\alpha| \le m).$$

Пространство $H^{20\gamma} = H^{20\gamma}(\mathbb{R}^n, X)$ определяется конечной нормой $||u||_{20\gamma} = ||u||_{20} + \langle u \rangle_{20\gamma}$ элемента $u \in H^{20\gamma},$ а пространство $H^{2m\gamma} = H^{2m\gamma}(\mathbb{R}^n, X)$ – нормой $||u||_{2m\gamma} = ||u||_{2m} + \langle u \rangle_{2m\gamma} < \infty,$ где

$$\langle u \rangle_{2m\gamma} = \sum_{|\alpha| \le m} \sup_{x,y \in \mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{K(x) \times K(y)} \frac{||D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)||^p}{|x-y|^{n+p\gamma}} dxdy \right)^{1/p}, \quad u \in H^{2m\gamma}.$$

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $P : H^{jm\gamma} \to H^{j0\gamma}$ $(j = 1, 2)$ в частных производных, действующий по формуле

$$Pu = \sum_{|\alpha| \le m} A\alpha(x) D^\alpha u(x)$$

с коэффициентами $A\alpha(x) \in C(\mathbb{R}^n, \mathrm{End} X)$.

Оператор $P : H^{jm\gamma} \to H^{j0\gamma}$ будем называть усиленно эллиптическим, если существуют такие постоянные a_1 и a_2, не зависящие от функции $u \in H^{jm\gamma}$, что

$$||u||'_{jm\gamma} \le a_1 ||u||_{j0\gamma} + a_2 ||P_m u||_{j0\gamma},$$

где P_m – главная часть оператора P,

$$||u||'_{jm\gamma} = \sum_{|\alpha| = m} ||D^\alpha u||_{j0\gamma}.$$

Рассмотрим оператор $P_m = \sum A\alpha(x) D^\alpha u(x)$ $(|\alpha| = m)$ в $H^{j0\gamma}$ с областью определения $D(P_m, H^{jm\gamma}) = H^{jm\gamma}$, т.е. $P_m = D(P_m, H^{jm\gamma}) \to H^{j0\gamma}$, замкнут и имеет плотную область определения. Предполагается, что отрицательная полуось состоит из его регулярных точек и резольвента удовлетворяет неравенству

$$||(P_m - \lambda)^{-1}||_{j0\gamma} = ||P_m(\lambda)||_{j0\gamma} \le \frac{M_1}{c + |\lambda|},\ c \ge 0,\ M_1 > 0 \tag{1}$$

не зависит от λ, $Re\lambda < \theta < 0$.

Теорема. Для усиленно эллиптического оператора $P : H^{jm\gamma} \to H^{j0\gamma}$ найдется число $\theta_1 < 0$ такое, что при $Re\lambda < \theta_1$ оператор $P - \lambda : H^{jm\gamma} \to H^{j0\gamma}$ имеет непрерывный обратный, определенный на всем пространстве $H^{jm\gamma}$.

Доказательство. Пусть $j = 1$. Неравенства о промежуточных производных ([5], с. 245; [6], с. 200) приводят к оценке

$$||u||_{1(m-1)\gamma} \le \varepsilon_{m-1} ||u||_{1m\gamma} + \sum_{k=1}^{m-2} \varepsilon_k \prod_{j=k+1}^{m-1} b(\varepsilon_j) ||u||_{1(k+1)\gamma} + \prod_{j=1}^{m-1} b(\varepsilon_j) ||u||_{10\gamma},\ u \in H^{1m\gamma}, \tag{2}$$

где величины $b(\varepsilon_j) > 0$ не зависят от функции u, при этом, вообще говоря, $b(\varepsilon_j)$ не ограничены при $\varepsilon_j \to 0$.

В силу усиленной эллиптичности оператора $P : H^{1m\gamma} \to H^{10\gamma}$ имеет место неравенство

$$||u||_{1m\gamma} \le a_1 ||u||_{j(m-1)\gamma} + a_2 ||P_m u||_{10\gamma}. \tag{3}$$

Отсюда согласно (2) при $2a_1 m \varepsilon_{m-1} < 1, \ldots, 2a_1 m b(\varepsilon_2) \cdots b(\varepsilon_{m-1}) < 1$ получаем

$$||u||_{1(m-1)\gamma} \le 2a_1 \prod_{j=1}^{m-1} b(\varepsilon_j) ||u||_{10\gamma} + 2a_2 \varepsilon_{m-1} ||P_m u||_{10\gamma}. \tag{4}$$

С помощью резольвенты $R_m(\lambda)$ и ее оценки (1) неравенство (4) запишем следующим образом

$$||R_m(\lambda) u||_{1(m-1)\gamma} \le \frac{2a_1 M_1}{c + |\lambda|} \prod_{j=1}^{m-1} b(\varepsilon_j) ||u||_{10\gamma} + 2a_2 \varepsilon_{m-1} ||u||_{10\gamma} + \frac{2a_2 M_1 \varepsilon_{m-1} |\lambda|}{c + |\lambda|} ||u||_{10\gamma}. \tag{5}$$

Положим $Q = P - P_m$ и рассмотрим оператор $QR_m(\lambda) : H^{10\gamma} \to H^{j0\gamma}$ Проверим его непрерывность. Согласно (5) имеем

$$||QR_m(\lambda)u||_{10\gamma} \leq a(Q)||R_m(\lambda)u||_{j(m-1)\gamma} \leq \frac{2a(Q)a_1M_1}{c+|\lambda|}\prod_{j=1}^{m-1} b(\varepsilon_j)||u||_{10\gamma}+$$

$$+2a(Q)a_2\varepsilon_{m-1}||u||_{j0\gamma} + \frac{2a(Q)a_2M_1\varepsilon_{m-1}|\lambda|}{c+|\lambda|}||u||_{10\gamma}. \tag{6}$$

Выберем ε_{m-1} так, чтобы $2a(Q)a_2\big(1 + M_1|\lambda|(c+|\lambda|)^{-1}\big)\varepsilon_{m-1} < 1/4$, а затем $Re\lambda < \theta$ возьмем таким образом, чтобы

$$\frac{2a(Q)a_1M_1|\lambda|}{c+|\lambda|} < \frac{1}{4}.$$

Тогда из (6) получим $||QR_m(\lambda)u||_{10\gamma} \leq 2^{-1}||u||_{10\gamma}$, т.е. оператор $QR_m(\lambda) : H^{10\gamma} \to H^{10\gamma}$ непрерывен и $||QR_m(\lambda)u||_{10\gamma} \leq 1/2$. Поэтому оператор $I + QR_m(\lambda) : H^{10\gamma} \to H^{10\gamma}$ имеет непрерывный обратный. Так как

$$(P-\lambda)u = \big(I + QR_m(\lambda)\big)\big(P_m - \lambda\big)u \quad (u \in H^{1m\gamma}),$$

то оператор $P - \lambda : H^{1m\gamma} \to H^{10\gamma}$ непрерывно обратим. Случай $j = 2$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 3-е изд., доп. и перераб. М.: Наука, 1988.
2. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1985.
3. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
4. *Левитан Б.М., Жиков В.В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
5. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
6. *Мизоката С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.

Поступила в редакцию 8 апреля 2015 г.

Tyurin V.M. ABOUT SPECTRUM OF LINEAR DIFFERENTIAL OPERATOR IN PARTIAL DERIVATIVES IN SOME FUNCTIONAL SPACES

Proved that resolvent set of linear differential operator in partial derivatives of elliptical type in spaces of Sobolev-Slobodetcky and spaces of Sobolev-Stepanov include negative semiaxis $Re\lambda < \theta$, at some $\theta < 0$.

Key words: Space of Sobolev-Slobodetcky; spaces of Sobolev-Stepanov; strengthened ellipticity; differential operator.

Тюрин Василий Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: tuvm@stu.lipetsk.ru

Tyurin Vasily Mikhaylovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, e-mail: tuvm@stu.lipetsk.ru