group based on the calculation of complex estimate for each object, taking into account quantitative and qualitative factors affecting the quality of the object, and the importance of these factors for the decision makers. Estimated scoring model provides a comprehensive account of factors directly and indirectly affect the attractiveness of securities, including liquidity and fundamentals of the issuers. On the example of the Russian stock market formed an optimal portfolio of securities.

Key words: portfolio of securities; scoring model; profitability; risk; liquidity; Russian stock market; aggregate.

Пьянков Михаил Андреевич, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, студент кафедры информационных систем и математических методов в экономике, e-mail: pyankov.psu@yandex.ru

Pyankov Mikhail Andreevich, Perm State National Research University, Perm, the Russian Federation, Student of the Information Systems and Mathematical Methods in Economics Department, e-mail: pyankov.psu@yandex.ru

Симонов Петр Михайлович, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, e-mail: simpm@mail.ru

Simonov Pyotr Mihkailovich, Perm State National Research University, Perm, the Russian Federation, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Information Systems and Mathematical Methods in Economics Department, e-mail: simpm@mail.ru

УДК 517.93

ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ЗАДАННОГО ВЫХОДА В СИСТЕМЕ НАБЛЮДЕНИЯ

© **Е.В. Раецкая, С.П. Зубова**

Ключевые слова: система наблюдения; состояние; управление; функция выхода.
Рассматривается динамическая система, описывающая реализующийся процесс. Решается задача построения управления, обеспечивающего получение априори заданного выхода. Исследование ведется методом расщепления уравнений на уравнения в подпространствах. Приводятся формулы для построения функций управления и состояния.

Реализующийся динамический процесс описывается соотношениями

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Du(t), \tag{1}$$

$$F(t) = Bx(t), \tag{2}$$

где $A \in L(R^n, R^n)$, $B \in L(R^n, R^m)$, $D \in L(R^k, R^n)$; $t \in [0, T]$, T − конечно.

Дифференциально-алгебраическая система (1), (2) называется *системой наблюдения*, вектор-функция $x(t) \in R^n$ называется *состоянием системы (траекторией)*, $u(t) \in R^m$ — *функцией управления (управлением)*.

Состояние системы недоступно непосредственному измерению, в распоряжении наблюдателя имеется лишь измеряемая, наблюдаемая выходная функция $F(t) \in R^m$. Решается задача построения управляющей функции $u(t)$, обеспечивающей получение на выходе априори заданного выхода $F(t)$ из класса достижимых функций. Такие задачи встречаются при проектировании сетей различных типов, например, тепловых, электроэнергетических, газораспределительных; при исследовании диффузионных процессов и так далее.

При исследовании применяется метод декомпозиции уравнений, суть которого заключается в поэтапном расщеплении пространств на подпространства и переходе к системе относительно неизвестных из подпространств.

В случае конечномерных систем процесс исследования полностью реализуется за число шагов, не превышающее размерности исходного пространства. Этот метод дал хорошие результаты при исследовании полной наблюдаемости и полной управляемости различных систем, жесткости дескрипторных динамических систем, инвариантности систем относительно различных возмущений, при решении задач с контрольными точками ([1] – [8]).

Рассматривается общий случай необратимой прямоугольной матрицы B (в случае её обратимости задача тривиальна), которой соответствуют разложения пространств в прямые суммы

$$R^n = CoimB \dot{+} KerB, \quad R^m = CokerB \dot{+} ImB, \tag{3}$$

где ImB — множество значений B в R^m; $KerB$ — множество решений уравнения $Bx = 0$ в R^n , здесь $dimKerB = n_0$; $CoimB$ — прямое дополнение к подпространству $KerB$ в R^n; $CokerB$ — прямое дополнение к подпространству ImB в R^m.

Через P и Q обозначим проекторы на подпространства $KerB$ и $CokerB$, соответственно, а через $(I - P)$ и $(I - Q)$ — проекторы на подпространства $CoimB$ и ImB, соответственно; I — тождественный оператор в соответствующем пространстве.

Разложения (3) таковы, что сужение $\widetilde{B}$ отображения B на подпространство $CoimB$ осуществляет взаимно-однозначное соответствие между подпространствами $CoimB$ и ImB.

Введем полуобратную матрицу $B^- = \widetilde{B}^{-1}(I - Q)$.

Известно, что соотношение

$$Bx = y, \quad x \in R^n, \quad y \in R^m, \tag{4}$$

эквивалентно системе

$$Qy = 0, \tag{5}$$

$$x = B^- y + Px, \tag{6}$$

где Px – произвольный элемент из подпространства $KerB$.

Уравнение (4) имеет решение x тогда и только тогда, когда выполняется условие (5) — условие корректности, разрешимости уравнения (4). Разложения (3) записываются не единственным образом, то есть проекторы и полуобратная матрица могут иметь различный вид. Однако, равенства (5), (6), соответствующие различным видам записи матриц P, Q, B^-, эквивалентны. Выражение (4) можно расщеплять на соотношения (5), (6) и алгебраическим способом, то есть на практике, при решении уравнения (4), нет необходимости в построении проекторов.

Уравнение (2) исходной системы эквивалентно системе

$$QF(t) = 0, \tag{7}$$

$$x(t) = B^- F(t) + x_1(t), \tag{8}$$

с некоторой вектор-функцией $x_1(t) = Px(t) \in KerB$.

Подстановка выражения (8) в (1) приводит к соотношению

$$\frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{dB^- F(t)}{dt} = Ax_1(t) + AB^- F(t) + Du(t), \tag{9}$$

которое, в соответствии с разложениями (3), расщепляется на соотношения в подпространстве $KerB$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = PAx_1(t) + PDu(t) + PAB^- F(t), \qquad (10)$$

и в подпространстве $CoimB$

$$\frac{dB^- F(t)}{dt} - (I-P)AB^- F(t) = (I-P)Ax_1(t) + (I-P)Du(t). \qquad (11)$$

С введением обозначений

$$A_1 = PAP \in L(KerB, KerB),$$
$$D_1 = PD \in L(KerB, KerB),$$
$$B_1 = (I-P)AP \in L(KerB, CoimB),$$
$$f_1(t) = PAB^- F(t) \in KerB,$$
$$F_1(t) = (I-P)\Big(\frac{d}{dt} - A\Big)B^- F(t) \in CoimB,$$

система (10), (11) принимает вид

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = A_1 x_1(t) + D_1 u(t) + f_1(t),$$
$$F_1(t) = B_1 x_1(t). \qquad (12)$$

Заметим, рассматривается случай

$$(I-P)D = 0. \qquad (13)$$

Прямоугольной матрице $B_1 \in L(KerB, CoimB)$ соответствуют разложения

$$KerB = CoimB_1 \dot{+} KerB_1, \quad CoimB = CokerB_1 \dot{+} ImB_1,$$

с проекторами P_1 и Q_1 на подпространства $KerB_1$ и $CokerB_1$; $(I-P_1)$ и $(I-Q_1)$ на подпространства $CoimB_1$ и ImB_1. В случае $dimKerB_1 = n_1 = 0$, уравнение (12) эквивалентно системе

$$Q_1 F_1(t) = 0, \qquad (14)$$
$$x_1(t) = B_1^- F_1(t) + x_2(t), \qquad (15)$$

с некоторой вектор-функцией $x_2(t) = P_1 x_1(t) \in KerB_1$ и полуобратной матрицей $B_1^- = \widetilde{B}_1^{-1}(I-Q_1)$. В соответствии с формулами (8), (15) строится функция состояния

$$x(t) = B^- F(t) + B_1^- F_1(t), \qquad (16)$$

которая в момент времени $t=0$ принимает значение

$$x^0 = B^- F(0) + B_1^- F_1(0). \qquad (17)$$

Подстановка выражения (16) в соотношение (1) приводит к уравнению

$$Du(t) = \Big(\frac{d}{dt} - A\Big)\big(B^- F(t) + B_1^- F_1(t)\big) \qquad (18)$$

для нахождения искомой функции управления. Прямоугольной матрице D соответствуют разложения пространств в прямые суммы

$$R^k = CoimD \dot{+} KerD, \quad R^n = CokerD \dot{+} ImD,$$

с проекторами P_D и Q_D на подпространства $KerD$ и $CokerD$, $(I-P_D)$ и $(I-Q_D)$ на подпространства $CoimD$ и ImD. Уравнение (18) эквивалентно системе

$$\Big(Q_D\frac{d}{dt}-A\Big)\big(B^-F(t)+B_1^-F_1(t)\big)=0, \tag{19}$$

$$u(t)=D^-\Big(\frac{d}{dt}-A\Big)\big(B^-F(t)+B_1^-F_1(t)\big)+u_1(t) \tag{20}$$

с полуобратной матрицей $D^-=\widetilde{D}^{-1}(I-Q_D)$ и произвольной вектор-функцией $u_1(t)\in$ $\in KerD$, не оказывающей влияния на функционирование динамической системы. Условие (19) — условие корректности, разрешимости уравнения (18).

Таким образом осуществляется программное управление: для произвольной достаточно гладкой функции $F(t)$, обладающей свойствами (7), (14), (19), по формуле (20) строится вектор-функция $u(t)$. Динамическая система (1) с этой вектор-функцией $u(t)$ и начальным значением $x(0)=x^0$, вычисленным по формуле (17), имеет единственное состояние $x(t)$, влекущее получение на выходе с помощью соотношения (2) именно заданного результата $F(t)$. При этом должны выполняться условия:

$$(I-P)F(t)\in C^1([0,T]\longrightarrow CoimB, \quad (I-P_1)F_1(t)\in C^1([0,T]\longrightarrow CoimB_1, \tag{21}$$

необходимые и достаточные для существования производной функции $x(t)$ в системе (1).

Т е о р е м а 1. *В случае* $n_1=0$ *при выполнении условий* (7), (13), (14), (21), *управляющему воздействию* $u(t)$, *определяемому равенством* (20), *соответствует единственное состояние* $x(t)$, *определяемое по формуле* (16), *обеспечивающее в системе* (1), (2) *с начальным условием* (17) *получение заданного выхода* $F(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зубова С.П., Раецкая Е.В., Ле Хай Чунг.* О полиномиальных решениях линейной системы управления // Автоматика и телемеханика. 2008. № 11. С. 41–47.

2. *Раецкая Е.В., Зубова С.П., Фам Туан Кыонг.* Полная наблюдаемость нестационарной дифференциально-алгебраической системы // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2010. Т. 6. № 8. С. 82–86.

3. *Раецкая Е.В., Зубова С.П., Фам Туан Кыонг.* Об инвариантности нестационарной системы наблюдения относительно некоторых возмущений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1678–1679.

4. *Драпалюк М.В., Зубова С.П., Фам Туан Кыонг, Раецкая Е.В.* Исследование полной наблюдаемости динамической системы, моделирующей распространение информации в обществе // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2012. Т. 8. № 5. С. 10–14.

5. *Zubova S.P., Raetskaya E.V.* The Comparison of the Two Criteria of Complete Observability // Progress in Analysis. Proceeding of the 8-th Congress of the ISAAC (22-27 August 2011). V. 2. M.: Peoples' Friendship University of Russia, 2012. P. 248–256.

6. *Raetskaya E.V., Zubova S.P.* Invariance of a nonstationary observability system under certain perturbations // Journal of Mathematical Sciences. New York, 2013. V. 188. № 3. C. 218–226.

7. *Zubova S.P., Raetskaya E.V.* Solution of the Cauchy Problem for Two Descriptive Equations with Fredholm Operator // Doklady Mathematics. 2014. V. 90. № 3. P. 528–532.

8. *Zubova S.P., Raetskaya E.V.* A Study of the Rigidity of Descriptor Dynamical System in a Banach Space // Journal of Mathematical Sciences. New York, 2015. V. 208. № 1. P. 131-138.

Поступила в редакцию 9 июня 2015 г.

Raetskaya E.V., Zubova S.P. CONSTRUCTION OF THE CONTROL THAT PROVIDES THE PRESCRIBED OUTPUT FOR AN OBSERVING SYSTEM

Regular system describing the dynamical process is considered. The problem of constructing the control that provides the determined output is solved. The study is carried out by splitting equations into equations in the subspaces. The formula for the control, the use of which corresponds to the desired output function, is constructed.

Key words: observing system; state function; control, output function.

Раецкая Елена Владимировна, Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, e-mail: raetskaya@inbox.ru

Raetskaya Elena Vladimirovna, Morozov Voronezh State Forestry Engineering University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematics Department, e-mail: raetskaya@inbox.ru

Зубова Светлана Петровна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, e-mail: spzubova@mail.ru.

Zubova Svetlana Petrovna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical Analysis Department, e-mail: spzubova@mail.ru

УДК 517.977

ДВА ПОДХОДА К СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ-БЕЛЛМАНА И ЕГО СИНГУЛЯРНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

© А.С. Родин

Ключевые слова: уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана; сингулярное множество; сингулярная характеристика; метод сингулярных характеристик.

Изучается структура решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, когда гамильтониан непрерывно дифференцируем по всем компонентам. Исследование структуры решения данной задачи планируется провести в русле методов описанных в книге А.А. Меликяна.

Рассматривается краевая задача Коши для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + H\big(t,x,D_x\varphi(t,x)\big) = 0, \quad \varphi(T,x) = \sigma(x), \tag{1}$$

где $t \in [0,T]$, $x \in R^n$, $D_x\varphi(t,x) = \left(\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_n}\right)$.

Обозначим $\Pi_T = \{(t,x) : t \in [0,T], x \in R^n\}$.

Предполагается, что в задаче (1) выполнены следующие предположения:

A1) функция $H(t,x,s)$ непрерывно дифференцируема по переменным t,x,s, вогнута по переменной s;

A2) функция $\sigma(x)$ непрерывно дифференцируема;

A3) выполнены условия подлинейного роста:

$$||D_x H(t,x,s)|| \leqslant \alpha(1 + ||x|| + ||s||), \quad \alpha > 0;$$

$$||D_s H(t,x,s)|| \leqslant \beta(1 + ||x|| + ||s||), \quad \beta > 0.$$