[5], позволяют надеяться на получение содержательных результатов о разрешимости модельного уравнения (1) для случая сложных особенностей, содержащих «тонкие» конусы меньшей размерности, чем размерность пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев В.Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения. волноваяфакторизация. краевые задачи. 2-е изд. М.: КомКнига, 2010.

2. *Васильев В.Б.* Обратимость псевдодифференциальных операторов в многомерных конусах // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. № 5. С. 2468-2470.

3. *Vasilyev V.B.* On certain elliptic problems for pseudo differential equations in a polyhedral cone // Adv. Dyn. Syst. Appl. 2014. V. 9. № 2. P. 227-237.

4. *Vasilyev V.B.* New constructions in the theory of elliptic boundary value problems // In: Integral Methods in Science and Engineering. Proc. IMSE Conference, Karlsruhe, Germany, 2014. Birkhäuser, Basel, 2015. P. 573-584.

5. *Васильев В.Б.* Псевдодифференциальные уравнения, сингулярные интегралы и распределения // Прикладная математика и математическая физика. Москва, 2015. Т. 1. № 1. С. 3-18.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Липецкой области, проект № 14-41-03595-р-центр-а.

Поступила в редакцию 7 мая 2015 г.

Vasilyev V.B. PSEUDO DIFFERENTIAL EQUATIONS ON MANIFOLDS WITH COMPLICATED BOUNDARY

One describes the framework of a general solution of a model elliptic pseudo differential equation in a domain of a multidimensional space, which is a union of convex cones.

Key words: pseudo differential equation; multivariable Riemann boundary value problem; wave factorization; complicated boundary.

Васильев Владимир Борисович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, e-mail: vbv57@inbox.ru

Vasilyev Vladimir Borisovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: vbv57@inbox.ru

УДК 517.935

О РЕКОНСТРУКЦИИ ВОЗДЕЙСТВИЯ В СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© **А.Ю. Вдовин, С.С. Рублева**

Ключевые слова: динамический регуляризирующий алгоритм; обратные задачи динамики.

Предлагается динамический подход построения воздействия в существенно нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом для его реализации указываются дополнительные условия, которыми должна обладать система.

Пусть функция $x(\cdot)$ для $t \in [t_0-\delta, t_0+\theta]$, принимающая значения из компакта $E \subseteq R^n$, определяется как решение задачи Коши

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Функцию $u(\cdot)$ со значениями из выпуклого компакта $Q \subseteq R^q$, порождающую движение $x(\cdot)$ системы (1) с начальным условием (2), будем называть воздействием. Если функция $f(\cdot)$ определена и удовлетворяет условию Липшица для $(t, x, u) \in [t_0-\delta, t_0+\theta] \times E \times Q$, то это с большим запасом гарантирует для каждого измеримого воздействия и начального условия (2) существование и единственность решения системы (1).

Рассмотрим задачу восстановления воздействия $u(\cdot)$, порождающего движение $x(\cdot)$ по неточной информации $x_h(t)$ о фазовых координатах $x(t)$, поступающих в моменты t_i разбиения временного интервала $T = [t_0, t_0+\theta] : \ t_0 \leqslant t_1 \leqslant ... \leqslant t_n = t_0 + \theta$. При этом $|x_h(t_i) - x(t_i)| \leqslant h$.

Для ее решения будем придерживаться подхода изложенного в монографии [1]. Его особенность состоит в сведении бесконечномерной экстремальной задачи (минимизации функционала типа Тихонова) к решению серии однотипных простых конечномерных задач на каждом из интервалов разбиения $[t_i, t_{i+1}]$. Это осуществляется за счет регуляризации экстремального сдвига при управлении вспомогательной системой (поводырем), применяемой в теории позиционных дифференциальных игр [2]. Отметим, что основная часть [1] посвящена рассмотрению различных постановок задач для квазилинейных систем, то есть случаю, когда

$$f(t, x, u) = f_1(t, x) + f_2(t, x)u.$$

В этой ситуации дискретная модель имела вид:

$$w(t) = w(t_i) + \Big(f_1(t_i, x_h(t_i)) + f_2(t_i, x_h(t_i))v_h(t_i)\Big)(t - t_i), \tag{3}$$

$t \in (t_i, t_{i+1}], \quad w(t_0) = x_h(t_0),$

$$v_h(t) = \frac{1}{\alpha(h)} f_2^T(t_i, x_h(t_i))\Big(x_h(t_i) - w(t_i)\Big), \tag{4}$$

При этом функция $v_h(\cdot)$ рассматривалась как приближение для $u_*(\cdot)$ — воздействия, порождающего $x(\cdot)$ и обладающего наименьшей $L_2(T)$ нормой среди всех таких воздействий. Было установлено, что при определенном согласовании параметров $h, \alpha(h), \Delta(h)$ алгоритм (3),(4) обладает свойством $\lim\limits_{h\to 0} \|v_h(\cdot) - u_*(\cdot)\|_{L_2(T)} = 0$, т. е. является регуляризирующим. В [3] рассматривались дополнительные априорные ограничения на систему (1) и порождающее воздействие, позволяющие получить оценку точности алгоритма в том числе и для пространств с более слабой нормой.

Настоящая работа конкретизирует изложенные в [4] идеи использования динамической регуляризации для существенно нелинейной системы (1). Отметим, что это естественно потребовало жестких ограничений на гладкость, как правой части (1), так и воздействия $u(\cdot)$.

Станем предполагать, что условию Липшица удовлетворяют по t — порождающее $x(\cdot)$ воздействие, а также по совокупности переменных — частная производная по u правой части (1) на временном промежутке в некоторой окрестности движения и порождающего воздействия. В силу положенных ограничений система (1) при достаточно малом δ представима в виде:

$$x'(\cdot) = f\big(t, x(t), u(t-\delta)\big) + f'_u\big(t, x(t), u(t-\delta)\big)\big(u(t) - u(t-\delta)\big) + F\big(t, x(t), u(t-\delta)\big),$$

где $\big|F\big(t, x(t), u(t-\delta)\big)\big| \leqslant q\big|u(t) - u(t-\delta)\big|$. Пусть $x_\delta(\cdot)$ — решение системы

$$x'_\delta(\cdot) = f\big(t, x(t), u(t-\delta)\big) + f'_u\big(t, x(t), u(t-\delta)\big)v(t), \tag{5}$$

где $v(t) = u(t) - u(t-\delta)$.

Отметим существование константы K такой, что $\big|x_h(t_i) - x_\delta(t_i)\big| \leqslant h + K\delta$. Непрерывный аналог упоминавшейся выше модели для системы (5) имеет вид

$$w'_\alpha(t) = f\big(t, x(t), u_\alpha(t-\delta)\big) + f'_u\big(t, x(t), u_\alpha(t-\delta)\big)v_\alpha(t), \tag{6}$$

где $u_\alpha(t) = u_\alpha(t-\delta) + v_\alpha(t)$, $v_\alpha(t) = \Big(f'_u(t, x(t), u_\alpha(t-\delta)\Big)^T \dfrac{x(t) - w_\alpha(t)}{\alpha}$.

Решение (6) для определения $u_\alpha(\cdot)$, $w_\alpha(\cdot)$ на промежутке T требует наличие информации о предыстории воздействия $u_\alpha(\cdot)$ на промежутке $[t_0 - \delta, t_0]$ и начального условия $w_\alpha(t_0) = x(t_0)$. Рассматриваемая модель представляет из себя уравнение с малым параметром при производной. Такие системы дифференциальных уравнений подробно рассмотрены в [5]. Следуя проведенным там рассуждениям потребуем, чтобы (6) обладала свойствами существенно упрощающими исследование. В первую очередь это касается невырожденности $f'_u(\cdot)$ в некоторой окрестности $\bigcup\limits_{t\in T}\big(t, x(t), u(t)\big)$, что гарантирует единственность корня т. н. вырожденной системы, а симметричность матрицы коэффициентов при $w_\alpha(\cdot)$ — его устойчивость.

Утверждение. *Пусть выполнены оговоренные выше условия, тогда решение* $w_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)$ *задачи* (6) *на* T *существует и*

$$\lim_{\alpha\to 0} w_\alpha(t) = x(t), \quad \lim_{\alpha\to 0} u_\alpha(t) = u(t) \quad \textit{при} \quad t \in T.$$

На заключительном этапе построения алгоритма восстановление неизвестного воздействия используем для решения (6) какой-либо численный метод. Воспользуемся (для простоты) методом Эйлера. Подчеркнем, что теперь вместо значений $x(\cdot)$ мы вынуждены использовать $x_h(\cdot)$. На промежутке $[t_i, t_{i+1})$, $t_{i+1} - t_i = \Delta(h)$ реализация численного алгоритма имеет вид:

$$\overline{w}_\alpha(t_{i+1}) = \overline{w}_\alpha(t_i) + \big[f\big(t_i, x_h(t_i), \overline{u}_\alpha(t_{i-1})\big) + f'_u\big(t_i, x_h(t_i), \overline{u}_\alpha(t_{i-1})\big)\overline{v}_\alpha(t_i)\big]\Delta(h),$$

здесь

$$\overline{v}_\alpha(t_i) = \Big(f'_u\big(t_i, x_h(t_i), \overline{u}_\alpha(t_{i-1})\big)\Big)^T \frac{x_h(t_i) - \overline{w}_\alpha(t_i)}{\alpha(h)}, \quad \overline{u}_\alpha(t_i) = u_\alpha(t_{i-1}) + \overline{v}_\alpha(t_i),$$

$$\overline{w}_\alpha(t_0) = x_h(t_0), \qquad \overline{u}_\alpha(t_0 - \Delta(h)) = \overline{u}_\alpha(t_0), \quad \big|\overline{u}_\alpha(t_0) - u(t_0)\big| \leqslant \alpha(h).$$

Теорема. *Пусть* $h, \alpha(h), \Delta(h)$ *согласованы, то есть* $\alpha(h), \Delta(h)$, $\dfrac{\Delta(h) + h}{\alpha(h)}$ *стремятся к нулю вместе с* h. *Тогда для кусочнолинейной аппроксимации* $\overline{u}_\alpha(\cdot)$ *узлов* $\overline{u}_\alpha(t_i)$ *выполняется* $\lim\limits_{h\to 0}\|u(t) - \overline{u}_\alpha(t)\| = 0$ *для* $t \in T$.

З а м е ч а н и е. Известно [6], что для решения жестких систем (именно такой является (6)) целесообразно использовать неявные методы, которые обладают собственным регуляризирующим эффектом. Например, неявный метод Эйлера. Это позволяет увеличить величину $\Delta(h)$ в согласовании параметров и приведет к уменьшению зашумленности решения. Однако ценой за эти преимущества будет увеличение количества арифметических операций необходимых для осуществления одного шага метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995.

2. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.

3. *Вдовин А.Ю., Рублева С.С.* О гарантированной точности процедуры динамического восстановления управления с ограниченной вариацией в системе, зависящей от него линейно // Математические заметки. 2010. Т. 87. Вып. 3. С. 337-358.

4. *Вдовин А.Ю., Рублева С.С.* Численный метод построения воздействия в нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений по неточной информации о ее фазовых состояниях // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 18. Вып. 5. С. 2472-2473.

5. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

6. *Лекомцев А.В., Пименов В.Г.* Полуявный метод для численного решения функционально-дифференциально-алгебраических уравнений // Известия высших учебных заведений. Математика. 2009. № 5. С. 62-67.

Поступила в редакцию 5 мая 2015 г.

Vdovin A.Yu., Rubleva S.S. THE RECONSTRUCTION OF IMPACT IN THE SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

A dynamic approach for constructing impact in the essentially nonlinear system of ordinary differential equations is proposed. At the same time, for its realization, additional conditions the system has to possess are specified

Key words: the dynamic regularization algorithm; inverse problems of dynamic.s

Вдовин Андрей Юрьевич, Уральский государственный лесотехнический университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики, e-mail: vdovin@usfeu.ru

Vdovin Andrey Yurevich, Ural State Forest Engineering University, Ekaterinburg, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, the Head of the Higher Mathematics Department, e-mail: vdovin@usfeu.ru

Рублева Светлана Сергеевна, Уральский государственный лесотехнический университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: rublevas@mail.ru

Rubleva Svetlana Sergeevna, Ural State Forest Engineering University, Ekaterinburg, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: rublevas@mail.ru