зань, Российская Федерация, аспирант кафедры вычислительной математики, e-mail: ildar.badriev@kpfu.ru

Singatullin Marsel Talgatovich, Kazan Federal University, Kazan, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Computing Mathematics Department, e-mail: ildar.badriev@kpfu.ru

Чебаков Юрий Владимирович, Усольский сельскохозяйственный техникум, с. Усолье, Самарская область, Российская Федерация, преподаватель, e-mail: yshk_chebakov@mail.ru

Chebakov Yurii Vladimirovich, Usolsky Agricultural College, Usolye, Samara region, the Russian Federation, Lecturer, e-mail: yshk_chebakov@mail.ru

УДК 517.929

О РАЗРЕШИМОСТИ НА ОСИ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© А.С. Баландин

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение; запаздывание; разрешимость на оси.

Получено представление решения на оси автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием. Данная задача сводится к изучению расположения нулей характеристической функции этого уравнения на комплексной плоскости.

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, D_{loc} — пространство локально абсолютно непрерывных функций.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейное автономное однородное дифференциальное уравнение с ограниченным запаздыванием

$$\dot{x}(t) + \int_0^\omega x(t-s)\,dr(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $\omega > 0$, функция $r\colon [0,\omega] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ограниченной вариации, $r(0) = 0$. Интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса. Вариацию функции r обозначим $\rho = \int_0^\omega |dr(s)|$. Соответствующей заменой переменных к уравнениям вида (1) можно сводить различные классы сингулярных функционально-дифференциальных уравнений, рассматриваемых на конечном отрезке. Для таких уравнений вопросы однозначной разрешимости оказываются нетривиальными.

Оставаясь в рамках традиционного понимания решения дифференциальных уравнений, мы предполагаем, что производная в уравнении (1) должна существовать в классическом смысле. Нам представляется наиболее удачным считать решение уравнения (1) принадлежащим классу локально абсолютно непрерывных функций D_{loc} (подробнее об этом см. [1]).

Известно (см. [2, с. 73], [3, с. 98]), что на $\mathbb{R}_+$ решения уравнения (1) имеют оценку:

$$|x(t)| \leqslant x(0)e^{\rho t}.$$

При изучении уравнений вида (1) на положительной полуоси эта оценка оказывается очень полезной (например, даёт возможность применять интегральные преобразования). Остаётся ли она справедливой на отрицательной полуоси? Ответ на этот вопрос даёт следующий пример, идея которого принадлежит Е.И. Бравому.

П р и м е р. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \frac{1}{1-t^2}e^{\frac{t^2}{t^2-1}}$, $t \in [-1,1]$. Используя [4, с. 1051-1052], запишем

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^0(1)t^{2n}, \tag{2}$$

где $L_n^0(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{t^k}{k!}$ — многочлен Лагерра. Функция φ бесконечно дифференцируема на отрезке $[-1,1]$, $\varphi(1-0) = \varphi(-1+0) = 0$, $\varphi^{(n)}(1-0) = \varphi^{(n)}(-1+0) = 0$. Из представления (2) следует, что $\varphi^{(2n+1)}(0) = 0$, $\varphi^{(2n)}(0) = L_n^0(1)(2n)!$. Пользуясь асимптотикой многочленов Лагерра [4, с. 1053], получаем

$$L_n^0(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{4}} \cos\left(2\sqrt{n} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(n^{-\frac{3}{4}}\right).$$

Функцию φ продолжим на всю отрицательную полуось по правилу: $\varphi(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t+2)$. Легко видеть, что при любом $\alpha \geqslant 0$ выполняется $\overline{\lim}_{t\to-\infty}(\varphi(t)e^{\alpha t}) = +\infty$. С другой стороны, функция φ удовлетворяет при $t \in \mathbb{R}_-$ частному случаю уравнения (1):

$$\dot{x}(t) = x(t-2).$$

Итак, существует пример автономного функционально-дифференциального уравнения, имеющего решения, растущие на $-\infty$ быстрее любой экспоненты. Следовательно, если мы хотим рассматривать решения уравнения (1) с определённой скоростью роста на отрицательной полуоси, нам придётся задавать скорость роста выбором пространства решений. Пусть α — произвольное вещественное число. Рассмотрим следующее функциональное пространство:

$$D_\alpha = \left\{ x \in D_{loc} \colon \sup_{t\in\mathbb{R}_-} \left(|x(t)|e^{-\alpha t}\right) < \infty \right\},$$

и его подпространство вида

$$D_\alpha^0 = \left\{ x \in D_{loc} \colon \lim_{t\to-\infty} \left(|x(t)|e^{-\alpha t}\right) = 0 \right\}.$$

Поставим задачу: найти условия разрешимости и структуру пространства решений уравнения (1) *в пространствах* D_α *и* D_α^0.

2. Некоторые свойства решений автономных функционально-дифференциальных уравнений на $\mathbb{R}_+$

Наряду с уравнением (1) на оси рассмотрим уравнение на положительной полуоси:

$$\dot{x}(t) + \int_0^\omega x(t-s)\,dr(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

При исследовании уравнения (3) важную роль играет характеристическая функция:

$$g(p) = p + \int_0^\omega e^{-p\xi}\,dr(\xi).$$

Отметим ряд важных свойств решения уравнения (3) и его характеристической функции, установленных в работах [2, 5, 6].

П р е д л о ж е н и е 1.

1. *Функция g аналитическая на всей комплексной плоскости.*

2. *Функция* g *имеет счётное множество нулей.*

3. *Все корни отделены друг от друга, в любой полуплоскости* $\operatorname{Re} p \geqslant \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *количество нулей функции* g *конечно.*

Обозначим $\{p_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, множество всех корней функции g, причём $\operatorname{Re} p_1 \geqslant \operatorname{Re} p_2 \geqslant \geqslant \ldots \geqslant \operatorname{Re} p_n \geqslant \ldots$. Обозначим $\beta_1 = \operatorname{Re} p_1$, $\beta_2 = \max\limits_{k\in\mathbb{N}, \operatorname{Re} p_k<\beta_1} \{\operatorname{Re} p_k\}$, $\ldots$, $\beta_n = = \max\limits_{k\in\mathbb{N}, \operatorname{Re} p_k<\beta_{n-1}} \{\operatorname{Re} p_k\}$, $\ldots$. Эта процедура не может прерваться, поскольку количество корней с одинаковой вещественной частью конечно.

Также в работах [2, 5, 6] показано

П р е д л о ж е н и е 2. *Фундаментальное решение уравнения* (3) *представимо в виде*

$$x(t) = \sum_{\operatorname{Re} p_n \geqslant \lambda} q_n(t) e^{p_n t} + z(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, *сумма берется по всем нулям* p_n *функции* g, *для которых* $\operatorname{Re} p_n \geqslant \lambda$, q_n — *многочлен, степень которого на единицу меньше кратности* p_n, *для функции* z *найдутся такие* $N > 0$, $\gamma < \lambda$, *что справедлива оценка* $|z(t)| \leqslant N e^{\gamma t}$.

3. Некоторые вспомогательные результаты

Л е м м а 1. *Пусть* $x \in D_\alpha$ *(или* D_α^0*)*, $\alpha > 0$. *Если функция* x *на* $\mathbb{R}_+$ *имеет оценку* $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} \left(|x(t)| e^{\gamma t}\right) < \infty$, $\gamma > 0$, *то к правой и левой части уравнения* (1) *можно применить преобразование Фурье.*

Л е м м а 2. *Пусть* $x \in D_\alpha$ *(или* D_α^0*)*, $\alpha > 0$. *Если все нули функции* g *лежат слева от мнимой оси, то в пространстве* D_α, $\alpha > 0$, *уравнение* (1) *имеет только тривиальное решение.*

Если n нулей функции g лежат справа от мнимой оси, а остальные нули находятся слева от мнимой оси, то с помощью замены $u(t) = x(t) - \sum_{k=1}^{n} q_k(t) e^{p_k t}$ получаем уравнение

$$\dot{u}(t) + \int_0^\omega u(t-s)\, dr(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

причём $u \in D_{\alpha'}$, $\alpha' > 0$, и выполняется оценка $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} \left(|u(t)| e^{\gamma t}\right) < \infty$, $\gamma > 0$. Значит, для уравнения (4) справедливы леммы 1 и 2. Откуда вытекает

Л е м м а 3. *Пусть* $x \in D_\alpha$ *(или* D_α^0*)*, $\alpha > 0$. *Если функция* g *не имеет нулей на мнимой оси,* n *нулей лежат справа от прямой* $\operatorname{Re} p = \alpha$, *а остальные нули находятся слева от прямой* $\operatorname{Re} p = \alpha$, *то в пространстве* D_α, $\alpha > 0$, *решение уравнения* (1) *представимо в виде*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} q_k(t) e^{p_k t},$$

где q_k — *многочлен, степень которого на единицу меньше кратности* p_k.

Пусть $x \in D_\alpha$, α может быть любого знака. Если n_1 нулей функции g лежат справа от прямой $\operatorname{Re} p = \alpha$, n_2 нулей лежат на прямой $\operatorname{Re} p = \alpha$, а остальные нули находятся слева от прямой $\operatorname{Re} p = \alpha$, то с помощью замены $x(t) = v(t) e^{-\beta t}$, получаем уравнение

$$\dot{v}(t) - \beta v(t) + \int_0^\omega v(t-s) e^{\beta s}\, dr(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Для характеристической функции g_v, соответствующей уравнению (5), выполняется $g_v(p) = g(p+\beta)$. Можно подобрать такое β, чтобы $v \in D_{\alpha'}$, $\alpha' > 0$, и все $n_1 + n_2$

нулей функции g_v лежали справа от мнимой оси, на мнимой оси нулей не было, остальные нули лежали слева от мнимой оси. Следовательно, для уравнения (5) справедлива лемма 3.

4. Основной результат

Поставим в соответствие последовательности $\{\beta_n\}$ последовательность классов D_{β_n} ($D^0_{\beta_n}$). Отметим несколько простых свойств этих множеств.

а) $D_{\beta_1} \subset D_{\beta_2} \subset \ldots \subset D_{\beta_n} \subset \ldots$

б) Неравенство $\alpha > \beta_1$ имеет место тогда и только тогда, когда $D_\alpha \subset D_{\beta_1}$.

в) Включение $\alpha \in (\beta_{n+1}, \beta_n)$ выполняется тогда и только тогда, когда $D_{\beta_{n+1}} \subset D_\alpha \subset$ $\subset D_{\beta_n}$.

Множества $D^0_{\beta_n}$ обладают такими же свойствами.

В силу предложения 1, последовательность $\{\beta_n\}$ разбивает вещественную ось на счётный набор интервалов, одному из которых принадлежит α .

Из утверждений, приведённых в предыдущем разделе, легко получить результат о структуре и разрешимости уравнения (1). Сначала рассмотрим случай, когда α совпадает с каким-либо из β_n .

Т е о р е м а 1. *Любое решение уравнения* (1) *в пространстве* D_{β_n} *представимо в виде:*

$$x(t) = \sum_{\operatorname{Re} p_k > \beta_n} q_k(t) e^{p_k t} + \sum_{\operatorname{Re} p_l = \beta_n} c_l e^{p_l t}, \tag{6}$$

где q_k *— многочлен, степень которого на единицу меньше кратности* p_k *,* $c_l \in \mathbb{R}$ *, вторая сумма берётся только по простым корням.*

Заметим, что вследствие предложения 1 в представлении решения (6) количество слагаемых конечно.

Частный случай теоремы 1 был получен в работе [7].

Т е о р е м а 2. *Любое решение уравнения* (1) *в пространстве* $D^0_{\beta_n}$ *представимо в виде:*

$$x(t) = \sum_{\operatorname{Re} p_k > \beta_n} q_k(t) e^{p_k t},$$

где q_k *— многочлен, степень которого на единицу меньше кратности* p_k *.*

Перейдём к случаю, когда α лежит внутри одного из интервалов (β_{n+1}, β_n) .

С л е д с т в и е 1. *Если* $\alpha \in (\beta_{n+1}, \beta_n)$ *, то сужение* D_α *и* $D_{\beta_{n+1}}$ *(соответственно,* D^0_α *и* $D^0_{\beta_n}$ *) на пространство решения уравнения* (1) *совпадают.*

С л е д с т в и е 2. *Уравнение* (1) *имеет только тривиальное решение в пространстве* D_α *тогда и только тогда, когда* $\alpha > \beta_1$ *.*

С л е д с т в и е 3. *Уравнение* (1) *имеет только тривиальное решение в пространстве* D^0_α *тогда и только тогда, когда* $\alpha \geqslant \beta_1$ *.*

5. Приложения

Теорема 1 сводит задачи разрешимости уравнения (1) к исследованию расположения нулей характеристической функции g на комплексной плоскости. Эта задача давно и хорошо известна, более того — для многих классов уравнений вида (1) она неплохо изучена [8-12].

Особенно информативен в этом смысле случай $\alpha = 0$, когда теоремы 1–2 и их следствия сводят рассматриваемую в данной статье задачу к классической задаче устойчивости.

В частности, следствие 2 утверждает эквивалентность однозначной разрешимости уравнения (1) в пространстве D_0 и асимптотической (экспоненциальной) устойчивости уравнения (3).

Обозначим: M_k — область, в которой характеристическая функция g имеет ровно k корней справа от мнимой оси. Для уравнений вида (1) с небольшим количеством параметров область M_0 допускает аналитическое и графическое описание.

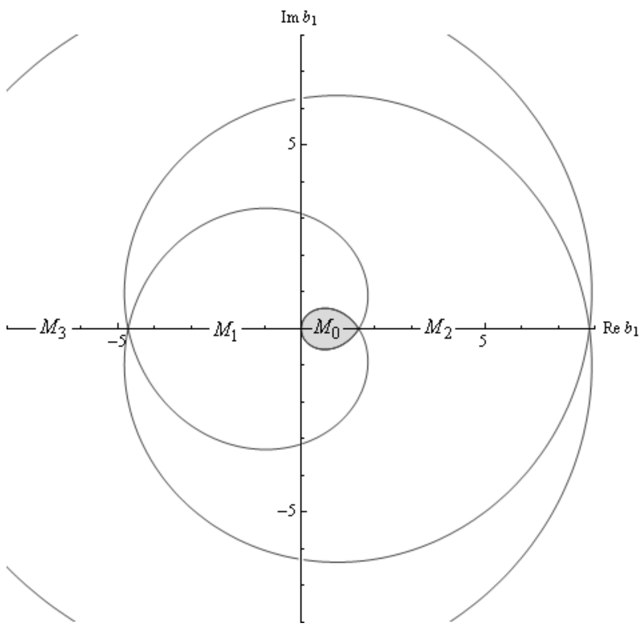

Рис. 1: Множества M_k для уравнения (7).

Для примера рассмотрим два уравнения:

$$\dot{x}(t) + b_1 x(t-1) = 0, \tag{7}$$

где $b_1 = |b_1| e^{i\psi} \in \mathbb{C}$,

$$\dot{x}(t) + b_0 x(t) + b_1 x(t-1) = 0, \tag{8}$$

где $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$.

Область M_0 для уравнения (7) описывается следующими неравенствами: $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$, $0 < |b_1| < \frac{\pi}{2} - |\psi|$.

Область M_0 для уравнения (8) описывается следующими неравенствами: $-b_0 < b_1 < \frac{\theta}{\sin\theta}$, где θ — наименьший положительный корень уравнения $b_0 = -\theta \operatorname{ctg} \theta$.

На рис. 1 и 2 приведены графики областей M_k для уравнений (7) и (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

2. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально–разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

3. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 2001.

4. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

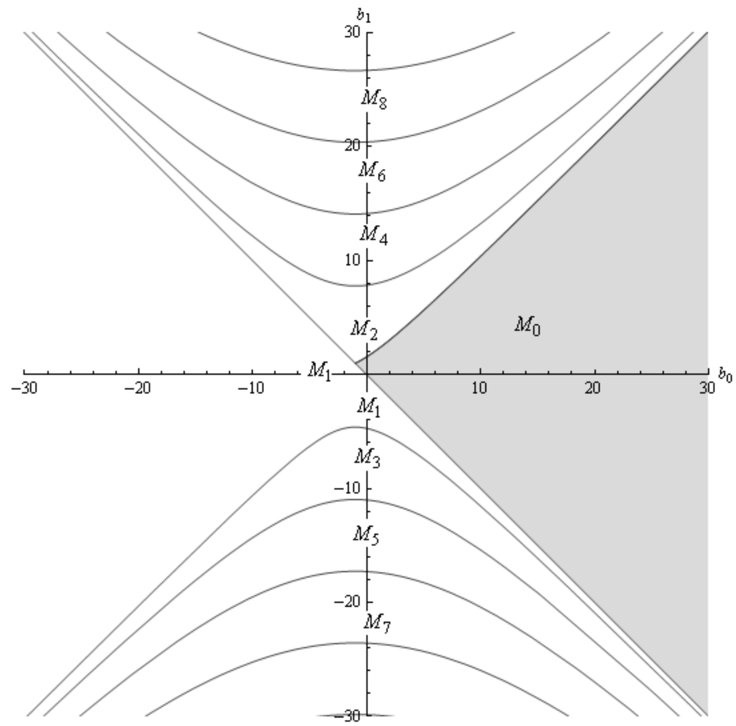

Рис. 2: Множества M_k для уравнения (8).

5. *Зубов В.И.* К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Математика. 1958. № 6. С. 86-95.

6. *Sabatulina T., Malygina V.* On positiveness of the fundamental solution for a linear autonomous differential equation with distributed delay // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2014. № 61. P. 1-16.

7. *Баландин А.С.* О разрешимости на оси некоторых классов дифференциально-разностных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. № 5-2. С. 2449-2451.

8. *Андронов А.А., Майер А.Т.* Простейшие линейные системы с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1946. Т. 7. № 2, 3. С. 95-106.

9. *Рехлицкий З.И.* Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве // ДАН СССР. 1956. Т. 111. № 1. С. 29-32.

10. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

11. *Киръянен А.И.* Устойчивость систем с последействием и их приложения. СПб.: Издательство Санкт–Петербургск. ун-та, 1994.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 13-01-96050 р урал а).

Поступила в редакцию 20 июня 2015 г.

Balandin A.S. ON SOLVABILITY OF AUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH BOUNDED DELAY ON THE AXIS

The representation of solutions for autonomous differential equations with bounded delay on the axis is obtained. The problem of solvability on the axis is reduced to the study of location of zeros of the characteristic function on the complex plane.

Key words: functional differential equation; delay; solvability on the axis.

Баландин Антон Сергеевич, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, младший научный сотрудник научно-исследовательского центра «Функционально-дифференциальные уравнения», e-mail: balandin-anton@yandex.ru

Balandin Anton Sergeevich, Perm State National Research University, Perm, the Russian Federation, Junior Researcher of the Research Center «Functional-Differential Equations», e-mail: balandin-anton@yandex.ru

УДК 517.977, 519.711

ОБ УСЛОВИЯХ НАБЛЮДАЕМОСТИ ПОЭТАПНО МЕНЯЮЩИХСЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

© **В.Р. Барсегян**

Ключевые слова: поэтапно меняющаяся линейная система, измерение, вполне наблюдаемость, условия вполне наблюдаемости.

Исследуется возможность полного восстановления фазовых координат поэтапно меняющейся линейной системы по результатам неполного измерения. Получены необходимое и достаточное условие полной наблюдаемости поэтапно меняющихся линейных нестационарных и стационарных систем. Показано, что на отдельных отрезках времени поэтапно меняющаяся система образованная не вполне наблюдаемыми стационарными системами может быть вполне наблюдаемой на всем отрезке времени.

Введение. Исследование многих прикладных задач процессов управления сводится к динамическим системам переменной структуры, таким как поэтапно меняющиеся системы, кусочно линейные импульсные системы и т. д. Задачи управления и наблюдения таких динамических систем имеют важные теоретическое и прикладное значения. Для реализации управления по принципу обратной связи необходимо знать фазовое состояние системы в каждый момент времени. Так как обычно не все фазовые координаты системы доступны измерению, необходимо рассмотреть вопрос о возможности полного восстановления фазовых координат поэтапно меняющейся линейной системы по результатам неполного наблюдения (измерения).

Управляемость и наблюдаемость – два фундаментальных понятия теории управления и являются принципиальными как в задачах для обычных систем [1–5], так и в задачах управления и наблюдения для поэтапно меняющихся систем. Вопросы управляемости и наблюдаемости указанных систем переменной структуры исследованы в работах [6–12]. В работах [7–9] получены необходимое и достаточное условие вполне управляемости поэтапно меняющейся линейной системы. В работах [11, 12] получены необходимое и достаточное условие для управляемости и наблюдаемости кусочно линейных импульсных управляемых систем.

В данной работе исследована возможность полного восстановления фазовых координат поэтапно меняющейся линейной системы по результатам неполного наблюдения (измерения). Получены необходимое и достаточное условие полной наблюдаемости поэтапно меняющихся линейных нестационарных и стационарных систем. Показано, что на отдельных отрезках времени поэтапно меняющаяся система образованная не вполне наблюдаемыми стационарными системами может быть вполне наблюдаемой на всем отрезке времени.