УДК 517.977.1

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОТОЧЕЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОТНОШЕНИЙ ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНОВА ТИПА

© **П.Д. Лебедев, А.А. Успенский**

Ключевые слова: краевая задача Дирихле; минимаксное решение; эйконал; задача о быстродействии; сингулярное множество; управление; уравнение в частных производных первого порядка.

Изучаются свойства решений негладких задач динамического управления и геометрической оптики, которые формализуются в виде краевых задач Дирихле для уравнений гамильтонова типа. Разрабатывается аппарат выявления и построения сингулярных множеств с помощью частичных пределов многоточечных дифференциальных отношений. Многоточечные дифференциальные отношения естественным образом возникают при анализе задач управления и дифференциальных игр, которым свойственна множественность управляемых движений, исходящих из фиксированной точки. Эффективность развиваемого метода исследования демонстрируется на примерах решения плоской задачи о быстродействии для случая невыпуклых целевых множеств, имеющих различные по своим дифференциальным свойствам границы.

Рассматривается краевая задача Дирихле для дифференциального уравнения в частных производных:

$$\min_{\nu:\ \|\nu\|\leqslant 1}\left(\nu_1\frac{\partial u}{\partial x}+\nu_2\frac{\partial u}{\partial y}\right)+1=0, \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma}=0. \tag{2}$$

Здесь $\|\nu\|=\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2}$ — норма вектора $\nu=(\nu_1,\nu_2)$. Краевое условие (2) определено на границе Γ замкнутого множества $M\subset\mathbb{R}^2$. Кривая Γ не имеет точек самопересечения, ее дифференциальные свойства следует оговаривать в каждом конкретном случае. В самой простой частной ситуации Γ — гладкая регулярная кривая.

Минимаксное (обобщенное) решение [1] задачи (1), (2) имеет вид [2]

$$u(x,y)=\rho\big((x,y),M\big),$$

где $\rho(\mathbf{x},M)=\min\limits_{\mathbf{m}\in M}\|\mathbf{m}-\mathbf{x}\|$ — евклидово расстояние от точки $\mathbf{x}$ до множества M. Решение $u=u(x,y)$ совпадает с функцией оптимального результата в задаче о быстродействии с целевым множеством $M\subset\mathbb{R}^2$ в случае круговой вектограммы допустимых скоростей. При этом функция лишь знаком отличается от эйконала — обобщенного решения в смысле определения С.Н. Кружкова [3] основного уравнения геометрической оптики [4] для случая изотропной среды. Таким образом, карты линий уровня обобщенных решений двух формально различных краевых задач идентичны. Это свойство позволяет, сформировав решение краевой задачи Дирихле для уравнения гамильтонова типа, получить представление и для решения соответствующего уравнения геометрической оптики.

В работе изучается структура минимаксного решения, которое в общем случае не является гладкой функцией. Сингулярное множество относится к множествам симметрии [5]. Особенности решения вскрываются с помощью трехточечных дифференциальных отношений, определяемых локальными диффеоморфизмами [6]. Здесь диффеоморфизм — скалярная непрерывно дифференцируемая строго монотонная без нулей производной функция.

Говоря о локальном диффеоморфизме, мы подразумеваем, что он определен в малом — в окрестности или же в полуокрестности точки рассмотрения.

Одним из инструментов выявления и описания особенностей решения задачи (1), (2) является симметрическая левая производная в силу диффеоморфизма — обобщение классической производной, адаптированное для решения задач гамильтонова типа.

Пусть $y = f(t)$ скалярная функция аргумента $t \in \mathbb{R}$.

О п р е д е л е н и е 1. Симметрической левой производной в силу диффеоморфизма $D_{h_{-+}} f(t_0)$, назовем односторонний левый частичный предел дифференциальных отношений $\dfrac{f(h_{-+}(t_1)) - f(t_1)}{h_{-+}(t_1) - t_1}$, построенных на трех точках $t = t_1, t = t_0, t = t_2$, $t_1 < t_0 < t_2$, связанных между собой в силу левого симметрического локального диффеоморфизма $h_{-+} = h_{-+}(t_1)$:

$$D_{h_{-+}} f(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0 - 0} \frac{f(h_{-+}(t_1)) - f(t_1)}{h_{-+}(t_1) - t_1}.$$

Упомянутый здесь симметрический левый локальный диффеоморфизм $h_{-+} = h_{-+}(t_1)$ переводит левую полуокрестность точки $t = t_0$ в ее правую полуокрестность.

Негладкие особенности решения краевой задачи (1), (2) формализуются в терминах означенных частичных односторонних производных. Отметим, что в случае тривиального локального диффеоморфизма $h_{-+}(t_1) = -(t_1 - t_0) + t_0$ производная $D_{h_{-+}} f(t_0)$ совпадает с симметрической производной Шварца. Отслеживая предысторию и преемственность конструкций, также стоит заметить, что в теории обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка односторонние производные применяются для описания свойств решений на линиях разрыва гладкости. Эти соотношения именуются условиями Ранкина–Гюгонио.

Эффективность разрабатываемого аппарата исследования негладких динамических задач [7] проиллюстрируем на примере задачи о быстродействии с целевым множеством M, ограниченным кривой Γ (известной как гипотрохоида)

$$\begin{cases} x = (R - mR)\cos mt + h\cos(t - mt), \\ y = (R - mR)\sin mt - h\sin(t - mt), \end{cases}$$

с параметрами $t \in [0, 8\pi]$, $R = 1, m = 0.25, h = 0.23$.

На рис. 1 представлены кривая Γ, волновые фронты Φ (линии уровня функции $u = u(x, y)$ с шагом 0.2) и сингулярное множество L.

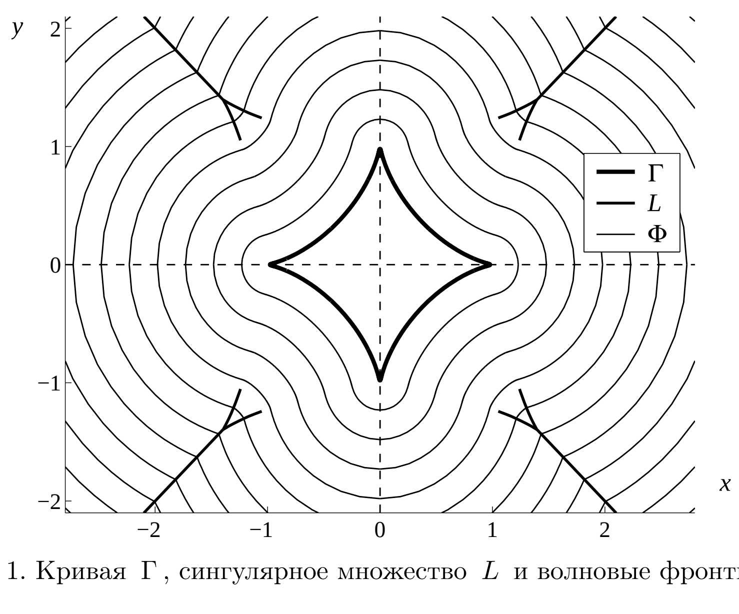

Рис. 1. Кривая Γ, сингулярное множество L и волновые фронты Φ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва; Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. 336 с.

2. *Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Труды Института математики и механики. 2008. Т. 14, № 2. С. 182-191.

3. *Кружков С.Н.* Обобщенные решения уравнений Гамильтона-Якоби типа эйконала, I // Матем. сборник. 1975. Т. 98, Вып. 3, С. 450-493.

4. *Слюсарев Г.Г.* Геометрическая оптика. М.: Издательство Академии наук СССР, 1946. 332 с.

5. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Построение функции оптимального результата в задаче быстродействия на основе множества симметрии // Автоматика и телемеханика. 2009. № 7. С. 50-57.

6. *Брус Дж., Джиблин П.* Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. 262 с.

7. *Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Геометрия сингулярных кривых для одного класса задач быстродействия // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. 2013. Сер. 10. Вып. 3. С. 157–167.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 15-11-10018.

Поступила в редакцию 13 мая 2015 г.

Lebedev P.D., Uspenskii A.A. MULTIPOINT DIFFERENTIAL RELATIONS USING FOR SEARCHING OF THE HAMILTON TYPE EQUATION SOLUTION SINGULARITIES

Properties of nonsmooth problems of control and geometric optics (formalized as the Dirichlet boundary problems) are studied. Apparat for multipoint differential relations finding and constructing is developed. Multipoint differential relations appears in an analyze of control problems and differential games, which often have many motions starting from one point. Efficiency of the developed method is illustrated on the example planar velocity problem with ninconvex target sets, which may have boarders with different differential properties.

Key words: Dirichlet boundary problem; mininimax solution; eikonal; velocity problem; singular set; control; the 1st order PDE.

Лебедев Павел Дмитриевич, Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, e-mail: pleb@yandex.ru

Lebedev Pavel Dmitrievich, Institute for Mathematics and Mechanics of UB RAS, Ekaterinburg, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, e-mail: pleb@yandex.ru

Успенский Александр Александрович, Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: uspen@imm.uran.ru

Uspenskii Aleksandr Aleksandrovich, Institute for Mathematics and Mechanics of UB RAS, Ekaterinburg, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, e-mail: uspen@imm.uran.ru