8. *Сорокин С.П.* Позиционные необходимые условия оптимальности и метод решения задач оптимального управления в дискретной системе, линейной по фазовой переменной // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 5. С. 2685-2687.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа частично поддержана РФФИ (проект № 14-01-00699-а), Программой государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5007.2014.9) и Программой фундаментальных исследований Президиума РАН (проект 17.1).

Поступила в редакцию 10 мая 2015 г.

Sorokin S.P. FEEDBACK MINIMUM PRINCIPLE FOR DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

Necessary global optimality conditions for three classes of discrete optimal control problems are obtained. The conditions use feedback controls and employ just Discrete Maximum Principle objects. The results are true without any convexity assumptions.

Key words: discrete optimal control; necessary conditions; Maximum Principle; feedback controls; iterative methods.

Сорокин Степан Павлович, Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, e-mail: sorsp@mail.ru

Sorokin Stepan Pavlovich, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, e-mail: sorsp@mail.ru

УДК 517.95

СИЛЬНОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

© В.И. Сумин

Ключевые слова: распределенные задачи оптимизации; управляемые вольтерровы функционально-операторные уравнения; поточечный принцип максимума; особые управления.

Показывается, что для широкого класса распределенных оптимизационных задач характерно сильное вырождение особых управлений поточечного принципа максимума, когда вместе с принципом максимума, который можно рассматривать как необходимое условие оптимальности первого порядка при игольчатом варьировании управлений, вырождаются и необходимые условия второго порядка. Описан способ получения содержательных необходимых условий оптимальности сильно вырожденных особых управлений.

Изучение *особых управлений* (ОУ) *поточечного принципа максимума* (ППМ), на которых он вырождается, важно как для приложений, так и для собственно теории оптимизации (см., например, [1–4]). Однако, до сих пор для распределенных управляемых систем ОУ ППМ изучены относительно слабо: начиная с первых работ [5, 6] на эту тему, в основном рассматривались управляемые системы Гурса-Дарбу и близкие им (см., например, [2, 7 – 12], [13, с. 5], [14, 15], обзоры [16, 17]). При выводе *необходимых условий оптимальности* (НУО) ОУ ППМ главные усилия были направлены на конструирование с учетом специфики таких управляемых систем формул приращения, удобных для вычисления старших вариаций функционалов.

Достаточно общий способ изучения ОУ ППМ был предложен в [18]. Он опирается на возможность представления управляемой начально-краевой задачи в форме функционально-операторного уравнения вида (1) в лебеговом пространстве и использует теорию тензорных произведений лебеговых пространств для вычисления старших вариаций функционалов. В [19–21] была представлена схема изучения ОУ, обобщающая способ [18]. Эта схема обслуживает широкий класс распределенных управляемых систем, описываемых вольтерровыми функционально-операторными уравнениями вида (1) (самые разнообразные примеры начально-краевых задач для нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, приводимых к форме (1), можно найти, например, в [22]), а также обширный аксиоматически описанный в [19–21] класс способов варьирования, включающий большинство способов, традиционно использующихся в теории НУО (классическое варьирование, игольчатое, импульсное на полосах, варьирование пакетами, сдвигом и др.). В [23] дана конкретизация схемы [19–21] применительно к игольчатому варьированию: показано, что для распределенных задач оптимизации достаточно характерно сильное вырождение ОУ ППМ, когда вместе с ППМ (НУО 1-го порядка при игольчатом варьировании) вырождаются и НУО 2-го порядка (точнее — вырождаются все НУО до порядка n включительно, где n – размерность пространства независимых переменных задачи оптимизации, и содержательными могут быть лишь НУО порядка $n+1$); для оптимизационных задач, связанных с вольтерровыми функционально-операторными уравнениями вида (1) получены НУО сильно вырожденных ОУ. Это позволило с единых позиций взглянуть на многие известные НУО ОУ сосредоточенных и распределенных оптимизационных задач и получить ряд новых НУО ОУ для распределенных оптимизационных задач, не рассматривавшихся в этом смысле ранее.

В данной публикации рассказывается об общих результатах, полученных для ОУ ППМ в [18–21, 23]. В докладе эти результаты иллюстрируются конкретными примерами, проводится сравнение с соответствующими результатами других авторов.

Примем следующие соглашения: векторы, если не оговорено противное, считаются столбцами; $\mathbf{R}^n$ — пространство n-вектор-столбцов; в покомпонентном представлении n-вектор-столбец $a \in \mathbf{R}^n$ записываем в строку в фигурных скобках: $a \equiv \left\{a^1, ..., a^n\right\}$; $\langle a, b\rangle_n \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} a^i b^i$ — скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbf{R}^n$; для $a, b \in \mathbf{R}^n$ пишем $a \geqslant b$, если $a^i \geqslant b^i$ $(i = 1, \ldots, n)$; если $a_1, ..., a_k \in \mathbf{R}^n$, то $\{a_i\}_{i=1}^k \equiv \{a_1, ..., a_k\} \equiv \left\{a_1^1, ..., a_1^n, ..., a_k^1, ..., a_k^n\right\} \in \mathbf{R}^{kn}$; модуль вектора равен сумме модулей его компонент; если X, Y — нормированные пространства, то $\mathfrak{L}(X, Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов из X в Y, а норма в прямом произведении $X \times Y$ задается формулой $\|\{x, y\}\|_{X\times Y} \equiv \|x\|_X + \|y\|_Y$; если X — функциональное пространство, то X^n — пространство n-вектор-функций, а $X^{n\times m}$ — $(n \times m)$-матриц-функций, составленных из функций пространства X; производная скалярной функции по векторному аргументу есть вектор-строка; знаком * обозначаются операции перехода к сопряженному пространству и сопряженному оператору, операция транспонирования.

Оптимизационная задача. Рассмотрим управляемое функционально-операторное уравнение

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \quad t \in \Pi, \tag{1}$$

где: $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченное, измеримое (по Лебегу) множество, играющее роль основного множества изменения независимых переменных $t \equiv \{t^1, ..., t^n\}$ [7]; $f(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ — функция, дважды дифференцируемая по $\mathbf{p}$ для всех $\mathbf{v}$ при почти всех t и вместе с производными $f'_{\mathbf{p}}$, $f''_{\mathbf{pp}}$ измеримая по t для всех $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}$ и непрерывная по $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}$ для почти всех t; $A \in \mathfrak{L}\left(L_1^m, L_1^l\right)$; $v(.) \in L_\infty^s$ — управление из класса $\mathcal{D} \equiv \{v \in L_\infty^s : v(t) \in U, t \in \Pi\}$, множество $U \subset \mathbf{R}^s$ ограничено. Будем предполагать выполненными сформулированные ниже условия K), а) – в).

K) *Функции* f, $f'_{\mathbf{p}}$, $f''_{\mathbf{pp}}$ *ограничены на любом ограниченном множестве. Это означает, что существует функция* $\mathcal{N}(.) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ *такая, что при любом* $v \in \mathcal{D}$

$$|f(t, \mathbf{p}, v(t))| \leqslant \mathcal{N}(M), \quad \left|f'_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{p}, v(t))\right| \leqslant \mathcal{N}(M), \quad \left|f''_{\mathbf{pp}}(t, \mathbf{p}, v(t))\right| \leqslant \mathcal{N}(M),$$

если $t \in \Pi, |\mathbf{p}| \leqslant M$.

а) *Оператор* A *имеет квазинильпотентную положительную мажоранту* B *класса* $\mathfrak{L}(L_1, L_1)$ $(|A[z]| \leqslant B[|z|], z \in L_1^m)$.

б) $B[L_\infty] \subset L_\infty$.

Из условия б) получаем (см. [24, с. 30]), что формула $B_\infty[z] \equiv B[z]$, $z \in L_\infty$ определяет оператор $B_\infty \in \mathfrak{L}(L_\infty, L_\infty)$. Условия $\mathbf{K}$), а), б) позволяют говорить о решениях уравнения (1) класса L_∞^m.

Следуя [22, с. 15], будем называть оператор $\mathcal{F}$, действующий из L_p^n в пространство измеримых на Π вектор-функций, вольтерровым на некоторой системе T измеримых подмножеств Π, если для любого $H \in T$ сужение $\mathcal{F}[z]\Big|_H$ не зависит от значений $z(t)$ при $t \in \Pi \setminus H$. Обозначим через P_H оператор умножения на характеристическую функцию χ_H множества $H \subset \Pi$. Пусть $\delta > 0$ — некоторое число, T_* — система множеств $\{H_0, H_1, \ldots, H_k\}$, где $\varnothing = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = \Pi$; положим $h_i \equiv H_i \setminus H_{i-1}$, $i = 1, \ldots, k$. Если некоторый оператор $\mathcal{F} \in \mathfrak{L}(L_p, L_p)$ вольтерров на системе T_* и $\|P_{h_i} \mathcal{F} P_{h_j}\|_{L_p \to L_p} \leqslant \delta$ при $i = 1, \ldots, k$, то, следуя [22, с.24], назовем T_* вольтерровой δ-цепочкой оператора $\mathcal{F}$.

в) *Для любого* $\delta > 0$ *у оператора* B_∞ *существует вольтеррова* δ*-цепочка*[8].

При сформулированных условиях управлению $v \in \mathcal{D}$ может отвечать не более одного в классе L_∞^m решения уравнения (1) [22, с. 37]. Будем считать, что семейство Ω тех управлений $v \in \mathcal{D}$, каждому из которых отвечает единственное в L_∞^m решение z_v уравнения (1), непусто. Пусть v_0 — фиксированный элемент Ω и $z_0 \equiv z_{v_0}$ — соответствующее управлению v_0 решение уравнения (1). Положим

$$\rho(v) \equiv \left\|B\left[\left|\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)\right|\right]\right\|_{L_\infty}, \quad v \in \mathcal{D},$$

используя обозначение

$$\Delta_{\mathbf{w}} f(t) \equiv f(t, A[z_0](t), \mathbf{w}) - f(t, A[z_0](t), v_0(t)), \quad t \in \Pi, \quad \mathbf{w} \in U.$$

Справедлива следующая теорема об устойчивости (при возмущении управления) существования глобальных решений уравнения (1) (см., например, [26, §3, теорема 4]).

Т е о р е м а 1. *Для любого управления* $v_0 \in \Omega$ *существуют числа* $\varkappa > 0$, $C > 0$ *такие, что всякое управление* $v \in \mathcal{D}$, *удовлетворяющее неравенству* $\rho(v) < \varkappa$, *принадлежит* Ω *и при этом*

$$\|z_v - z_0\|_{L_\infty^m} \leqslant C \left\|\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)\right\|_{L_\infty^m}, \qquad \|A[z_v - z_0]\|_{L_\infty^l} \leqslant C\rho(v). \tag{2}$$

Пусть $F : L_1^m \to \mathbf{R}$ — некоторый функционал, дважды непрерывно дифференцируемый по Фреше. Рассмотрим задачу оптимизации

$$J[v] \equiv F[z_v] \to \max, \quad v \in \Omega, \tag{3}$$

[7] В обозначениях пространств значок Π, как правило, опускаем; в скалярном случае опускаем значок, обозначающий размерность. Например, вместо $L_p^m(\Pi)$, $L_p^1(\Pi)$ пишем соответственно L_p^m, L_p.

[8] Заметим, что из условия в) следует квазинильпотентность оператора B_∞ [25].

для определенности понимая ее как задачу нахождения L_1^s-локального максимума. Везде ниже: v_0 — фиксированное решение задачи (3), $z_0 \equiv z_{v_0}$; v — некоторый элемент Ω, $\Delta z \equiv z_v - z_0$.

Принцип максимума и особые управления. Определим оператор $S : L_1^m \to L_1^m$ формулой

$$S[z](t) \equiv z(t) - f'_{\mathbf{p}}(t)A[z](t),\ z \in L_1^m,\ t \in \Pi,$$

в которой используется обозначение $f'_{\mathbf{p}}(t) \equiv f'_{\mathbf{p}}(t, A[z_0](t), v_0(t)),\quad t \in \Pi$; очевидно, $S \in \mathfrak{L}(L_1^m, L_1^m)$. Пусть $a_0[.] \equiv F'(z_0)[.]$ — производная Фреше функционала $F : L_1^m \to \mathbf{R}$ в точке z_0, а $\omega \in L_\infty^m$ — функция Рисса функционала a_0 как элемента сопряженного пространства $(L_1^m)^*$. Уравнение

$$S^*[\psi] = \omega, \tag{4}$$

где $S^* \in \mathfrak{L}(L_\infty^m, L_\infty^m)$ — сопряженный к S оператор, имеет единственное в L_∞^m решение ψ. Положим

$$\pi(t, \mathbf{w}) \equiv \langle \psi(t), \Delta_{\mathbf{w}} f(t)\rangle_m,\ t \in \Pi, \quad \mathbf{w} \in U.$$

Для задачи (3) справедливо следующее НУО в виде ППМ.

Т е о р е м а 2. *Для каждого $\mathbf{w} \in U$ при почти всех $\tau \in \Pi$ выполняется неравенство $\pi(\tau, \mathbf{w}) \leqslant 0$.*

Сформулированный ППМ можно считать НУО первого порядка относительно традиционного игольчатого варьирования, которое можно ввести следующим образом. Пусть: Σ — совокупность всех наборов $\sigma \equiv \{\tau, \mathbf{w}\}$, в каждом из которых $\mathbf{w}$ — какой-то элемент U, $\tau \in \Pi$ — некоторая правильная точка Лебега функции $\pi(\cdot, \mathbf{w})$; $\mathcal{H}$ — семейство всех пар $h \equiv \{\sigma, \varepsilon\}$, в каждой из которых $\sigma \equiv \{\tau, \mathbf{w}\} \in \Sigma$, а ε — такое положительное число, что множество $\Pi_\varepsilon(\tau) \equiv \tau - \varepsilon[0,1]^n$ принадлежит Π. Каждому $h \equiv \{\sigma, \varepsilon\} \in \mathcal{H}$ отвечает допустимое управление $v_h(t) \equiv \{\mathbf{w},\ t \in \Pi_\varepsilon(\tau);\ v_0(t),\ t \in \Pi \setminus \Pi_\varepsilon(\tau)\}$, а каждому набору *параметров варьирования* $\sigma \in \Sigma$ — семейство функций $\{v_h(\cdot)\}_{h \equiv \{\sigma,\varepsilon\} \in \mathcal{H}}$ — *простейшая одноточечная игольчатая варианта* (ПОИВ) управления v_0.

Назовем $\mathcal{M} \equiv \{\{t, \mathbf{w}\} \in \Pi \times U\colon\ \pi(t, \mathbf{w}) = 0\}$ особым множеством ППМ для управления v_0. При почти каждом $t \in \Pi$ значение $v_0(t)$ оптимального управления v_0 принадлежит сечению $\mathcal{M}(t) \equiv \{\mathbf{w} \in U\colon\ \{t, \mathbf{w}\} \in \mathcal{M}\}$ множества $\mathcal{M}$. Управление v_0 называем *особым управлением* (ОУ) ППМ, если

$$\operatorname{mes}\{t \in \Pi\colon \mathcal{M}(t) \neq \{v_0(t)\}\} > 0.$$

Говорим, что ППМ вырождается на ОУ ППМ и называем ОУ ППМ также вырожденным управлением ППМ. Пусть $\Pi_* \equiv \{t \in \Pi\colon\ \mathcal{M}(t) \neq \{v_0(t)\}\}$. Случай, когда $\operatorname{mes}\Pi_* = \operatorname{mes}\Pi$ и при почти всех $t \in \Pi$ сечения $\mathcal{M}(t)$ совпадают с U, назовем случаем *полного вырождения* ППМ. Ниже сначала рассмотрим именно этот случай, а уже потом общий случай вырождения ППМ.

Случай полного вырождения принципа максимума. Положим $\Delta_v J \equiv J[v] - J[v_0], v \in \Omega$. Пусть v_0 — ОУ для ППМ, причем имеет место случай полного вырождения. Предел $\delta^{\gamma-n+1}J(\sigma) \equiv \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\gamma}\Delta_{v_h}J$, если он существует при некотором $\gamma > n$, назовем *вариацией порядка* $\gamma - n + 1$ *функционала* J *на ПОИВ* $\{v_h(\cdot)\}_{h\equiv\{\sigma,\varepsilon\}\in\mathcal{H}}$; соответственно НУО вида $\delta^{\gamma-n+1}J(\sigma) \leqslant 0\ \ (\sigma \in \Sigma)$ назовем НУО порядка $\gamma - n + 1$ управления v_0 при простейшем одноточечном игольчатом варьировании. Типичной является ситуация, когда для ОУ v_0 вместе с $\delta J(\sigma) \equiv 0,\ \sigma \in \Sigma$ имеем $\delta^{\gamma-n+1}J(\sigma) \equiv 0,\ \sigma \in \Sigma,\ n < \gamma < n+1$ и содержательны, вообще говоря, лишь НУО, начиная с условий порядка 2. Поэтому назовем ОУ v_0 *сильно вырожденным для простейшего одноточечного игольчатого варьирования*, если тождественно зануляется вариация 2-го порядка: $\delta^2 J(\sigma) \equiv 0,\ \sigma \in \Sigma$.

Сформулируем условия (см. ниже условия **A**), обеспечивающие при $n > 1$ сильное вырождение ОУ (см. ниже теоремы 3 и 4) и позволяющие с помощью теории тензорных произведений лебеговых пространств построить удобную для изучения ОУ асимптотическую формулу приращения $\Delta_v J$ (см. ниже формулу (10) в теореме 5). Введем специальные обозначения:

$$f''_{\mathbf{pp}}(\cdot)[x,y] \equiv \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l} f''_{\mathbf{p}^i\mathbf{p}^j}(\cdot)x^i y^j,\ x,y\in \mathbf{R}^l;$$

$$\Gamma \equiv \left\{\{i,j\}:\ i\in\overline{1,m},\ j\in\overline{1,l};\ \Delta_{\mathbf{w}} f^{i'}_{\mathbf{p}^j}(t)=0 \ \text{ для любого } \mathbf{w}\in U \text{ при почти всех } t\in\Pi\right\};$$

если $X=(X_{ij})$ — $(m\times l)$-матрица, то $\widetilde{X}=(\widetilde{X}_{ij})$ — $(m\times l)$-матрица, в которой

$$\widetilde{X}_{ij}\equiv\{0,\ \{i,j\}\in\Gamma;\ X_{ij},\ \{i,j\}\notin\Gamma\},$$

X^0 — ml-столбец, полученный развертыванием матрицы X по правилу

$$X^0\equiv\{X_{11},X_{21},\ldots,X_{m1},X_{12},X_{22},\ldots,X_{ml}\},$$

а $M[\cdot]$ — обратный оператор свертывания ml-столбца в $(m\times l)$-матрицу.

Условия **A**. **A$_1$**) *Для любых* $\xi\in L^l_\infty,\ v\in\Omega$ *формула*

$$b_1(\xi,v)[x,y]\equiv 2^{-1}\int\limits_{\Pi}\left\langle\psi(t),\ f''_{\mathbf{pp}}(t,\xi(t),v(t))[A[x](t),A[y](t)]\right\rangle_m dt,\quad x,y\in L^m_1$$

определяет над $L^m_1\times L^m_1$ *ограниченный билинейный функционал* $b_1(\xi,v)[.,.]$, *непрерывно в норме* $L^l_\infty\times L^s_1$ *зависящий от* $\{\xi,v\}$.

A$_2$) *Формула*

$$b_2[x,y]\equiv\int\limits_{\Pi}\left\langle\psi(t)\ ,\ \widetilde{M[y(t)]}A[x](t)\right\rangle_m dt,\ x\in L^m_1,\ y\in L^{ml}_1$$

определяет над $L^m_1\times L^{ml}_1$ *ограниченный билинейный функционал* $b_2[.,.]$.

Укажем некоторые простые для проверки, но важные для приложений случаи, когда условия **A** заведомо выполняются.

Теорема 3. *Условия* **A** *выполняются в каждом из следующих случаев:*

i) $\psi(t)\equiv 0,\ t\in\Pi$;

ii) $A[L^m_1]\subset L^l_\infty$;

iii) $f(t,\mathbf{p},\mathbf{v})=f_1(t,\mathbf{p}_1)\mathbf{p}_2+f_2(t,\mathbf{p}_1,\mathbf{v})$, $\mathbf{p}=\{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\}$, $\mathbf{p}_i\in\mathbf{R}^{l_i}$ $(i=1,2)$, $l_1+l_2=l$, f_1 *является* $(m\times l_2)$-*матрицей,* $A[\cdot]=\{A^{(1)}[\cdot],A^{(2)}[\cdot]\}$, $A^{(i)}[\cdot]:L^m_1\to L^{l_i}_1$ $(i=1,2)$, *причем* $A^{(1)}[L^m_1]\subset L^{l_1}_\infty$.

Теорема 4. *Если* v_0 — *ОУ для ППМ и выполняются условия* **A**, *то из НУО, полученных для* v_0 *с помощью простейшего одноточечного игольчатого варьирования, вырождаются все условия до порядка* n *включительно, и содержательными могут быть лишь НУО порядка, большего* n; *таким образом, в случае* $n>1$ *ОУ* v_0 *будет сильно вырожденным ОУ.*

Выпишем упомянутую выше асимптотическую формулу для приращения $\Delta_v J,\ v\in\Omega$, из которой и следует теорема 4. Воспользуемся тем, что любой ограниченный билинейный над $L^m_1\times L^k_1$ функционал $b[\cdot,\cdot]$ единственным образом представим в виде (см., например, [27, гл. 3, п.п. 6.2, 6.4, 6.5])

$$b[x,y]=\int\limits_{\Pi}dt\int\limits_{\Pi}x^*(t)\Theta(t,s)y(s)ds,\quad x\in L^m_1,\quad y\in L^k_1, \tag{5}$$

где $\Theta \in L_\infty^{m\times k}(\Pi\times\Pi)$. Пусть:

$$b_0[x,y] \equiv 2^{-1}\cdot F''(z_0)[x,y],\ x,y\in L_1^m,$$

где $F''(z_0)[\cdot,\cdot]$ — билинейный функционал второй производной Фреше $F''(z_0)$; $\Theta_0(t,s)$ и $\Theta_1(t,s)$ — ($m\times m$)-матрицы, отвечающие по формуле (5) функционалам b_0 и

$$b_{10} \equiv b_1(A[z_0],v_0)$$

соответственно; $\Theta_2(t,s)$ — ($m\times ml$)-матрица, отвечающая функционалу b_2; I_k — тождественный оператор в L_1^k; $L_1^m \otimes L_1^k$ — проективное тензорное произведение L_1^m и L_1^k, натянутое на элементы $x(t)\otimes y(s) \equiv x(t)y^*(s)$ ($x\in L_1^m$, $y\in L_1^k$) и совпадающее с $L_1^{m\times k}(\Pi\times\Pi)$ [27, гл. 3, п.п. 6.4, 6.5].

Рассматриваемое над $L_\infty^{m\times m}(\Pi\times\Pi)$ уравнение

$$(S\otimes S)^*[\eta(t,s)] = \Theta_i(t,s) \tag{6_i}$$

имеет единственное решение $\eta_i(t,s)$ ($i=0,1$). Уравнение

$$(S\otimes I_{ml})^*[\eta(t,s)] = \Theta_2(t,s) \tag{7}$$

имеет единственное в $L_\infty^{m\times ml}(\Pi\times\Pi)$ решение $\eta_2(t,s)$. В более подробной записи уравнения (6_i) и (7) имеют, соответственно, вид

$$\begin{gathered}\eta(t,s) - (I_m^*\otimes A^*)\left[\eta(t,s)\cdot\left\{f'_{\mathbf{p}}(s)\right\}^*\right] - (A^*\otimes I_m^*)\left[\left\{f'_{\mathbf{p}}(t)\right\}^*\cdot\eta(t,s)\right] + \\ +(A^*\otimes A^*)\left[\left\{f'_{\mathbf{p}}(t)\right\}^*\cdot\eta(t,s)\cdot\left\{f'_{\mathbf{p}}(s)\right\}^*\right] = \Theta_i(t,s)\quad (t,s\in\Pi),\end{gathered} \tag{8_i}$$

$$\eta(t,s) - (A^*\otimes I_{ml}^*)\left[\left\{f'_{\mathbf{p}}(t)\right\}^*\cdot\eta(t,s)\right] = \Theta_0(t,s)\quad (t,s\in\Pi), \tag{9}$$

где каждый первый сомножитель в тензорном произведении операторов «действует по переменной t», а каждый второй сомножитель — по переменной s, I_m^* есть тождественный оператор в L_∞^m.

Положим

$$r(v)\equiv\|\Delta_{v(\cdot)}f(\cdot)\|_{L_1^m},\quad r_1(v)\equiv\|\Delta_{v(\cdot)}f'_{\mathbf{p}}(\cdot)\|_{L_1^{m\times l}},\quad v\in\mathcal{D},$$

где

$$\Delta_{\mathbf{w}}f'_{\mathbf{p}}(t)\equiv f'_{\mathbf{p}}(t,A[z_0](t),\mathbf{w}) - f'_{\mathbf{p}}(t,A[z_0](t),v_0(t)),\quad t\in\Pi,\quad \mathbf{w}\in U.$$

Введем обозначение

$$E(t,s;\mathbf{v},\mathbf{w})\equiv\left\langle\Delta_{\mathbf{v}}f(t),\{\eta_0(t,s)+\eta_1(t,s)\}\Delta_{\mathbf{w}}f(s)+\eta_2(t,s)\{\Delta_{\mathbf{w}}f'_{\mathbf{p}}(s)\}^0\right\rangle_m,$$

$t,s\in\Pi$, $\mathbf{v},\mathbf{w}\in U$.

Т е о р е м а 5. *При условиях* **А** *справедлива следующая асимптотическая формула для приращения функционала*

$$\begin{gathered}\Delta_v J = \int\limits_\Pi \pi(t,v(t))dt + \int\limits_\Pi dt\int\limits_\Pi E(t,s;v(t),v(s))ds + o(\{r(v)+r_1(v)\}^2),\\ r(v)\to 0,\quad r_1(v)\to 0,\quad \rho(v)\to 0,\quad \|v-v_0\|_{L_1^s}\to 0,\quad v\in\Omega.\end{gathered} \tag{10}$$

В условиях теоремы 5 формула (10) позволяет, если существует вариация $\delta^{n+1}J(\sigma)$, $\sigma\in\Sigma$, вывести НУО порядка $n+1$. Для существования вариации $\delta^{n+1}J(\sigma)\equiv\delta^{n+1}J(\tau,\mathbf{w})$ достаточно, например, выполнения следующих условий **Б**.

Условия **Б**. **Б$_\mathbf{i}$**) *Для функции* $\eta_i(t,s)$ *правильные относительно* $2n$*-мерной меры Лебега на* $\Pi\times\Pi$ *точки Лебега образуют на «диагонали»* $\{\{t,s\}\in\Pi\times\Pi : t=s\}$ *множество полной меры относительно* n*-мерной «диагональной» меры Лебега.* ($i=0,1,2$)

О возможностях проверки условий **Б** в конкретных задачах см. ниже п. Замечания.

Теорема 6. *Пусть* v_0 — L_1^s*-локальное решение* (3) *и полностью вырожденное ОУ для ППМ. Если выполняются условия* **А** *и* **Б**, *то*

$$\text{для каждого } \mathbf{w}\in U \text{ при почти всех } \tau\in\Pi: \quad \delta^{n+1}J(\tau,\mathbf{w}) = E(\tau,\tau;\mathbf{w},\mathbf{w}) \leqslant 0.$$

Общий случай. Выше рассматривался случай полного вырождения ППМ на ОУ v_0, когда $\Pi_*=\Pi$ и $\mathcal{M}(t)=U$ при всех $t\in\Pi$. В общем случае вырождение ППМ на ОУ v_0 означает, что mes $\Pi_*>0$, но Π_* уже может не совпадать с Π и не обязательно $\mathcal{M}(t)=U$ для $t\in\Pi_*$. Чтобы распространить на общий случай вырождения полученные выше в случае полного вырождения ППМ результаты, воспользуемся более общим способом одноточечного игольчатого варьирования, чем ПОИВ (в общем случае простейшее игольчатое варьирование, вообще говоря, не дает содержательных НУО ОУ, так как график ПОИВ в этом случае может не принадлежать множеству $\mathcal{M}$).

Пусть v_0 — ОУ ППМ. Заметим, что $\pi(t,\mathbf{w}):\Pi\times\overline{U}\to\mathbf{R}$ — функция Каратеодори и поэтому (см. [27, п. 8.1.5]) отображение $\overline{\mathcal{M}(\cdot)}:\Pi\to 2^{\overline{U}}$ измеримо и имеет счетное аппроксимирующее его семейство измеримых функций $\mathbf{K}\equiv\{v_k(t),t\in\Pi\}_{k=1}^{\infty}$, то есть существует $\Pi_0\subset\Pi$ такое, что:

$$\overline{\mathcal{M}(t)} = \overline{\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty}\{v_k(t)\}\right\}}, \quad t\in\Pi_0, \quad \text{mes }\Pi_0 = \text{mes }\Pi.$$

Обозначим через Π_l ту часть множества Π_0, каждая точка которой есть точка Лебега суперпозиции $\pi(\cdot,v_k(\cdot))$ для любой функции $v_k(\cdot)$ семейства **K**. Очевидно,что mes $\Pi_l=$ mes Π.

Пусть: $\mathbf{\Sigma}$ — совокупность всех наборов $\zeta\equiv\{\tau,v_k\}$, в каждом из которых τ — некоторая точка множества Π_l, а v_k — какой-то элемент **K**; **H** — семейство всех пар $\mathbf{h}\equiv\{\zeta,\varepsilon\}$, в каждой из которых $\zeta\equiv\{\tau,v_k\}\in\mathbf{\Sigma}$, а ε — такое положительное число, что $\Pi_\varepsilon(\tau)\subset\Pi$. Каждому $\mathbf{h}\equiv\{\zeta,\varepsilon\}\in\mathbf{H}$ отвечает допустимое управление

$$v_{\mathbf{h}}(t)\equiv\{v_k(t),\ t\in\Pi_\varepsilon(\tau);\ v_0(t),\ t\in\Pi\setminus\Pi_\varepsilon(\tau)\},$$

а каждому набору *параметров варьирования* $\zeta\equiv\{\tau,v_k\}\in\mathbf{\Sigma}$ — семейство $\{v_{\mathbf{h}}(\cdot)\}_{\mathbf{h}\equiv\{\zeta,\varepsilon\}\in\mathbf{H}}$, одноточечная игольчатая варианта управления v_0. Такой специальный способ варьирования назовем *одноточечным игольчатым варьированием, связанным с множеством* $\mathcal{M}$. Предел $\delta^{\gamma-1}J(\zeta)\equiv\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\gamma}\Delta_{v_{\mathbf{h}}}J$, если он существует при некотором $\gamma\geqslant n$, назовем *вариацией порядка* $\gamma-1$ *функционала* J *на варианте* $\{v_{\mathbf{h}}(\cdot)\}_{\mathbf{h}\equiv\{\zeta,\varepsilon\}\in\mathbf{H}}$; соответственно НУО вида $\delta^{\gamma-1}J(\zeta)\leqslant 0$ $(\zeta\in\mathbf{\Sigma})$ назовем НУО порядка $\gamma-1$ управления v_0 при одноточечном игольчатом варьировании, связанном с множеством $\mathcal{M}$. Для указанного способа варьирования первая вариация $\delta J(\zeta)\equiv\delta J(\tau,v_k)\equiv\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^{-n}\Delta_{v_{\mathbf{h}}}J)$ при любом $\zeta\equiv\{\tau,v_k\}\in\mathbf{\Sigma}$ существует и равна $\pi(\tau,v_k(\tau))$. Так как **K** аппроксимирует отображение $\overline{\mathcal{M}(\cdot)}$, то для ОУ v_0 имеем: $\delta J(\zeta)\equiv 0$, $\zeta\in\mathbf{\Sigma}$. Назовем ОУ v_0 *вырожденным* ОУ *для одноточечного игольчатого варьирования, связанного с множеством* $\mathcal{M}$, если тождественно зануляется вариация 2-го порядка: $\delta^2 J(\zeta)\equiv 0$, $\zeta\in\mathbf{\Sigma}$.

При условиях **А** из формулы (10) получаем: $\Delta_{v_{\mathbf{h}}}J=O(\varepsilon^{2n})$, $\varepsilon\to 0$ ($\zeta\in\mathbf{\Sigma}$). То есть справеливо следующее утверждение, обобщающее теорему 4.

Т е о р е м а 7. *Если управление* v_0 — ОУ *для* ППМ, *то* v_0 — *вырожденное* ОУ *для одноточечного игольчатого варьирования, связанного с особым множеством* ППМ *для этого управления, и содержательными для* v_0 *могут быть лишь* НУО *порядка, большего* n.

Из (10) следует также, что при условиях **А**, **Б** вариация $(n+1)$-го порядка $\delta^{n+1}J(\tau, v_k) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon^{-2n}\Delta_{v_{\mathbf{h}}}J\right)$ для каждого $v_k \in \mathbf{K}$ при почти всех $\tau \in \mathbf{\Pi}$ существует и равна $E(\tau, \tau; v_k(\tau), v_k(\tau))$. Так как **K** аппроксимирует отображение $\overline{\mathcal{M}(\cdot)}$, то отсюда вытекает следующее НУО порядка $n+1$, обобщающее НУО теоремы 6.

Т е о р е м а 8. *Пусть* v_0 — *ОУ для ППМ. Если выполняются условия* **А** *и* **Б**, *то для оптимальности управления* v_0 *необходимо выполнение условия:*

$$E(\tau, \tau; \mathbf{w}, \mathbf{w}) \leqslant 0 \quad \text{для любого } \mathbf{w} \in \mathcal{M}(\tau) \text{ при почти всех } \tau \in \Pi.$$

Замечания. 1. В конкретных задачах условия **Б**, как правило, сравнительно легко проверяются. Удобно бывает воспользоваться тем, что уравнения (4), (8_i), (9) имеют вид

$$Z(\xi) - \mathcal{L}[Z](\xi) = \Theta(\xi), \quad \xi \in \Xi,$$

где $\mathcal{L} \in \mathfrak{L}\left(L^k_\infty(\Xi), L^k_\infty(\Xi)\right)$ — квазинильпотентный оператор. При этом, если некоторое замкнутое в $L^k_\infty(\Xi)$, инвариантное относительно $\mathcal{L}$ множество G содержит функцию Θ, то и $L^k_\infty(\Xi)$-решение уравнения принадлежит G. Так, например, в задачах оптимизации гиперболических и сосредоточенных систем с терминальными и интегральными функционалами функции Θ_i обычно непрерывны везде на $\Pi \times \Pi$ за исключением, быть может, конечного числа фиксированных гиперповерхностей разрыва типа конечного скачка. Уравнения (8_i), (9) позволяют доказать, что таковы же и функции η_i, а это означает выполнение условия **Б**.

2. Конкретные иллюстрации к сказанному выше можно найти, например, в [21], где рассматриваются терминальная оптимизационная задача для системы с запаздыванием и оптимизационная задача на минимум интегрального функционала, связанная со смешанной задачей для гиперболического уравнения второго порядка. Там же показано, как из общих НУО ОУ получить известную теорему о матричных импульсах (см. [1, с. 179], а также [3, теорема 21.1]) — утверждение о НУО ОУ ППМ в терминальной задаче оптимизации сосредоточенной управляемой системы (в [21] рассматривается общий случай каратеодориевской правой части управляемой системы дифференциальных уравнений). Конкретной иллюстрацией к описанному выше являются и результаты, содержащиеся в статье И.В. Лисаченко и В.И. Сумина «Об особых управлениях принципа максимума в терминальной задаче оптимизации системы Гурса-Дарбу», публикуемой в данном номере журнала; приводимые в этой статье НУО ОУ (см. также [29–31]) обобщают на случай каратеодориевской правой части системы Гурса-Дарбу известные сходные НУО ОУ, относящиеся к случаю более гладкой правой части.

3. Некоторые сведения, дополняющие сказанное выше, можно почерпнуть в [32, 33].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973.

2. *Васильев О.В.* Качественные и конструктивные методы оптимизации управляемых процессов с распределенными параметрами: автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Л.: ЛГУ, 1984.

3. *Мордухович Б.Ш.* Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988.

4. *Зеликин М.И., Борисов В.Ф.* Особые оптимальные режимы в задачах математической экономики // Современная математика и ее приложения. Тбилиси: Институт кибернетики АН Грузии, 2003. Т. 11. С. 3-161.

5. *Васильев О.В.* Об оптимальности особого управления в системах с распределенными параметрами // Тезисы докл. II Всесоюзной конф. по проблемам теоретической кибернетики. Новосибирск, 1971. С. 26-27.

6. *Васильев О.В.* Об оптимальности особых управлений в системах с распределенными параметрами // Управляемые системы. Новосибирск, 1972. №10. С. 27-34.

7. *Ащепков Л.Т., Васильев О.В.* Об оптимальности особых управлений в системах Гурса–Дарбу // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1975. Т. 15. № 5. С. 1157-1167.

8. *Срочко В.А.* Условия оптимальности для одного класса систем с распределенными параметрами // Сиб. математ. журн. 1976. Т. 17. №5. С. 1108-1115.

9. *Меликов Т.К.* Исследование особых процессов в некоторых оптимальных системах: автореф. дисс. ... к-та физ.-матем. наук. Баку: Бакинский гос. ун-т, 1976.

10. *Ащепков Л.Т., Васильев О.В., Коваленок И.Л.* Усиленное условие оптимальности особых управлений в системе Гурса–Дарбу // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 6. С. 1054-1059.

11. *Бурдуковский А.Н.* Условия оптимальности особых управлений в задаче Гурса–Дарбу // Управляемые системы. Новосибирск, 1986. № 26. С. 16-24.

12. *Мансимов К.Б.* К теории необходимых условий оптимальности в одной задаче управления системами с распределенными параметрами // ДАН СССР. 1988. Т. 301. №3. С. 546-550.

13. *Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А.* Методы оптимизации и их приложения. Ч. 2. Оптимальное управление. Новосибирск: Наука, 1990.

14. *Мансимов К.Б.* Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управления: автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Баку: Бакинский гос. ун-т, 1994.

15. *Мансимов К.Б., Марданов М.Дж.* Качественная теория оптимального управления системами Гурса–Дарбу. Баку: Элм, 2010.

16. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б.* Необходимые условия оптимальности второго порядка для систем с распределенными параметрами. Минск, 1982. (Препринт АН БССР. Ин-т математики, № 31)

17. *Мансимов К.Б.* Особые управления в задачах управления системами с распределенными параметрами // Современная математика и ее приложения. Тбилиси: Институт кибернетики АН Грузии, 2006. Т. 42. С.39-83.

18. *Сумин В.И.* Оптимизация управляемых обобщенных вольтерровых систем: автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Горький: ГГУ, 1975.

19. *Сумин В.И.* Дифференцирование функционалов оптимального управления // Материалы итоговой научной конф. радиофиз. ф-та ГГУ за 1982г. Горький 1-2 февраля 1983. Часть 2. ВИНИТИ, № 6035-83 ДЕП. 1983.

20. *Сумин В.И.* Сильное вырождение особых управлений в распределенных задачах оптимизации // ДАН СССР. 1991. Т. 320. №2. С. 295-299.

21. *Сумин В.И.* Сильное вырождение особых управлений в задачах оптимизации распределенных систем // Оптимизация: сб. научн. тр. Новосибирск, 1993. №52(69). С. 74-94.

22. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Вольтерровы уравнения и управляемые начально-краевые задачи. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.

23. *Сумин В.И.* Об особых управлениях поточечного принципа максимума в распределенных задачах оптимизации // Вестник Удмуртского университета. Серия: Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. № 3. С. 70-80.

24. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.

25. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402-1411.

26. *Сумин В.И.* Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестник Нижегородского университета. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 1998. Вып. 2 (19). С. 138-151.

27. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.

28. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

29. *Лисаченко И.В., Сумин В.И.* Об особых управлениях принципа максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 1 (39). С. 80-81.

30. *Лисаченко И.В., Сумин В.И.* Об особых управлениях поточечного принципа максимума в задаче оптимизации системы Гурса–Дарбу // Вестник Тамбовского Университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 5. С. 2576-2577.

31. *Лисаченко И.В., Сумин В.И.* Об особых управлениях поточечного принципа максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу // ННГУ. Н. Новгород, 2012. 26 с. Деп. в 13.03.2012. ВИНИТИ, № 89 - В.2012.

32. *Сумин В.И.* Особые оптимальные управления распределенных задач и вольтерровы функционально-операторные уравнения // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 1(39). С. 128-129.

33. *Сумин В.И.* Об особых управлениях в распределенных задачах оптимизации // Вестник Тамбовского Университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 5. С. 2696-2697.

БЛАГОДАРНОСТИ: Финансовая поддержка Минобрнауки РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014-2016 гг. (проект №1727) и грантом (соглашение от 27.08.13 №02.B.49.21.0003 между Минобрнауки РФ и ННГУ).

Поступила в редакцию 7 мая 2015 г.

Sumin V.I. STRONG DEGENERATION OF THE SINGULAR CONTROLS IN THE SENSE OF THE MAXIMUM PRINCIPLE IN DISTRIBUTED OPTIMIZATION PROBLEMS

It is proved that for distributed optimization problems a sufficiently typical situation is strong degeneration of the singular controls in the sense of the point-wise maximum principle, when together with the maximum principle (which is a first order necessary optimality condition in the case of spike-shaped variation) a second order necessary optimality conditions also degenerates. A derivation of constructive necessary optimality conditions for singular controls is suggested.

Key words: distributed optimization problems; guided Volterra functional-operator equations; point-wise maximum principle; singular controls.

Сумин Владимир Иосифович, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики, e-mail: v_sumin@mail.ru

Sumin Vladimir Iosifovich, Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, the Head of the Mathematical Physics Department, e-mail: v_sumin@mail.ru

УДК 517.977

СУБДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ ЗНАЧЕНИЙ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИСТЕМАМИ

© **М.И. Сумин**

Ключевые слова: оптимальное управление; параболическое уравнение; минимизирующая последовательность; субдифференцируемость; функция значений; устойчивость; принцип Лагранжа; теорема Куна–Таккера; принцип максимума Понтрягина; модифицированная функция Лагранжа; фазовые ограничения; двойственная регуляризация.

Обсуждается связь субдифференцируемости функций значений с устойчивыми секвенциальными или, другими словами, регуляризованными принципом Лагранжа в недифференциальной форме и принципом максимума Понтрягина в выпуклой и невыпуклой параметрических задачах оптимального граничного управления для линейного параболического уравнения с поточечными фазовыми ограничениями.

Введение. Принцип максимума Понтрягина [1] является центральным результатом всей теории оптимального управления, в том числе, и системами с распределенными параметрами. Его формулировка и доказательство предполагают, прежде всего, что задача