УДК 517.988 + 517.962.24

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

© Е.С. Жуковский, И.А. Забродский, А.И. Шиндяпин

Ключевые слова: разностное уравнение; периодическое решение; векторно накрывающие отображения метрических пространств; кратные точки совпадения.

Рассматривается неявное разностное уравнение в произвольном метрическом пространстве. Получены условия существования периодических решений. Исследование основано на результатах о векторных накрывающих отображениях.

Утверждения о накрывающих отображениях метрических пространств в последнее время стали активно применяться для изучения различных неявных уравнений. Для неявных дифференциальных уравнений методами теории накрывающих отображений в работах исследовалась задача Коши, в работах [4, 5] — краевые задачи, а в работах [6–8] — задачи управления. Интегральным уравнениям Вольтерра неявного вида посвящена статья [9]. Новые подходы к изучению неявных разностных уравнений с помощью результатов о накрывающих отображениях предложены в работах [10, 11] в которых получены условия разрешимости, оценки решения и признак устойчивости положения равновесия. Здесь предлагаются условия существования периодических решений неявных разностных уравнений. Наше исследование основано на результатах о векторных накрывающих отображениях.

Обозначаем $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел; $i(n)$ — остаток от деления $i \in \mathbb{Z}$ на $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$; $\mathbb{R}^m$ — m-мерное вещественное пространство; $\mathbb{R}^m_+$ — конус векторов с неотрицательными компонентами пространства $\mathbb{R}^m$; I_m — единичную $m \times m$ матрицу. Для произвольных векторов $r^1, r^2 \in \mathbb{R}^m$ полагаем $r^1 \geqslant r^2$, если $r^1 - r^2 \in \mathbb{R}^m_+$.

Пусть заданы метрические пространства (X, ρ_X), (Y, ρ_Y); для любого $i \in \mathbb{Z}$ пусть определены отображение $\gamma_i : X^2 \to Y$ и элемент $y_i \in Y$. Рассмотрим неявное неавтономное разностное уравнение

$$\gamma_i(x_{i+1}, x_i) = y_i, \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Решением этого уравнения считаем последовательность $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset X$, элементы которой удовлетворяют (1) при всех $i \in \mathbb{Z}$.

Пусть n — натуральное число. Будем предполагать, что в уравнении (1) последовательности $\{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ и $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ являются n-периодическими, т. е. $y_{i+n} = y_i$, $\gamma_{i+n} = \gamma_i$ при любом $i \in \mathbb{Z}$. Получим условия существования n-периодического решения уравнения (1).

Прежде всего заметим, что для существования n-периодического решения уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы была разрешимой система уравнений

$$\begin{cases} \gamma_1(x_2, x_1) = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \gamma_{n-1}(x_n, x_{n-1}) = y_{n-1}, \\ \gamma_n(x_1, x_n) = y_n. \end{cases} \tag{2}$$

Набор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из первых n членов n-периодического решения $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ уравнения (1)
является решением системы (2); и обратно, если вектор $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ удовлетворяет системе (2), то периодическая последовательность $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $x_i = \xi_{i(n)}$, будет решением разностного уравнения (1).

Для исследования системы (2) предлагается распространить понятие накрывания [12] на отображения, действующие в произведениях метрических пространств.

Обозначим через $\mathrm{B}_X(u,r)$ замкнутый шар $\{x \in X : \rho_X(x,u) \leqslant r\}$ с центром в точке $u \in X$ радиуса $r \geqslant 0$ в пространстве X.

О п р е д е л е н и е 1 [12]. Пусть задано число $\alpha > 0$. Отображение $\Psi : X \to Y$ называется *α-накрывающим,* если для любых $r \geqslant 0$, $u \in X$ имеет место вложение

$$\mathrm{B}_Y(\Psi(u), \alpha r) \subset \Psi(\mathrm{B}_X(u,r)).$$

Сформулируем векторный аналог определения 1.

Пусть заданы метрические пространства X_i, Y_j, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. Определим произведения пространств

$$\overline{X} = \prod_{i=1}^{n} X_i, \quad \overline{Y} = \prod_{j=1}^{m} Y_j,$$

в которых зададим векторные метрики: для элементов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \in \overline{X}$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, $w = (w_1, \ldots, w_m) \in \overline{Y}$ положим

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}(x,u) = \big(\rho_{X_1}(x_1,u_1), \ldots, \rho_{X_n}(x_n,u_n)\big), \quad \overline{\rho}_{\overline{Y}}(y,w) = \big(\rho_{Y_1}(y_1,w_1), \ldots, \rho_{Y_m}(y_m,w_m)\big).$$

Для векторов $r = (r_1, \ldots, r_m) \in \mathbb{R}^m_+$, $w = (w_1, \ldots, w_m) \in \overline{Y}$ положим

$$\overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(w,r) \doteq \{y \in \overline{Y} : \ \overline{\rho}_{\overline{Y}}(y,w) \leqslant r\} = \prod_{j=1}^{m} \mathrm{B}_{Y_j}(w_j, r_j).$$

Аналогично, для $d = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \overline{X}$ обозначим

$$\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u,d) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{B}_{X_i}(u_i, d_i).$$

О п р е д е л е н и е 2. Пусть задана $n \times m$ матрица A с неотрицательными компонентами a_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. Отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ назовем *векторно A-накрывающим,* если для для любых $r \in \mathbb{R}^m_+$, $u \in \overline{X}$ имеет место вложение

$$\overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Psi(u), r) \subset \Psi(\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u, Ar)). \tag{3}$$

Сформулируем утверждение о возмущениях векторно накрывающего отображения. Пусть определено отображение $\Upsilon : \overline{X} \times \overline{X} \to \overline{Y}$, являющееся по первому аргументу векторно накрывающим (точнее, удовлетворяющее условию (3) при заданных $r \in \mathbb{R}^m_+$, $u \in \overline{X}$). Отображение Υ по второму аргументу будем воспринимать, как возмущение. Нас будут интересовать условия, при которых отображение $F : \overline{X} \to \overline{Y}$ определенное равенством

$$F(x) = \Upsilon(x,x) \ \ \forall \, x \in \overline{X}.$$

сохранит свойство векторного накрывания.

Т е о р е м а 1. *Пусть метрические пространства X_i, $i = \overline{1,n}$, являются полными; график отображения F замкнут в пространстве $\overline{X} \times \overline{Y}$; существуют такие матрицы A, B размерностей $n \times m$ и $m \times n$, соответственно, что выполнены следующие условия:*

(1.1) *при любых $u \in \overline{X}$, $r \in \mathbb{R}^m_+$, для отображения $\Psi \doteq \Upsilon(\cdot, u) : \overline{X} \to \overline{Y}$ выполнено (3);*

(1.2) *для любых $v, u \in \overline{X}$ выполнено неравенство*

$$\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Upsilon(v,u), \ \Upsilon(v,v)\big) \leqslant B \overline{\rho}_{\overline{X}}(u,v);$$

(1.3) *для спектрального радиуса* ϱ *квадратной матрицы* BA *выполнено* $\varrho(BA) < 1$.
Тогда отображение F *является векторно* $A(I_m - BA)^{-1}$ *-накрывающим.*

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы о возмущениях скалярных накрывающих отображений из работы [1].

Определение 2 свойства векторного накрывания отображения $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ можно сформулировать в терминах свойств решения уравнения $\Psi(x) = y$:

Отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ *является векторно* A *-накрывающим тогда и только тогда, когда*

$$\forall\, u \in \overline{X} \quad \forall\, y \in \overline{Y} \quad \exists\, x \in \overline{X} \quad \Psi(x) = y \ \ \& \ \ \overline{\rho}_{\overline{X}}(x, u) \leqslant A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u));$$

Это достаточно очевидное утверждение позволяет трактовать теорему 1 как признак разрешимости уравнения

$$\Upsilon(x, x) = y, \tag{4}$$

с отображением $\Upsilon : \overline{X} \times \overline{X} \to \overline{Y}$, и, кроме того, теорема 1 предоставляет оценку решения уравнения (4). Уравнение (4) — это векторная запись системы

$$\left\{\begin{array}{l} \Upsilon_1(x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_n) = y_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot\, , \\ \Upsilon_m(x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_n) = y_m. \end{array}\right. \tag{5}$$

Таким образом, теорема 1 равносильна следующему утверждению.

Теорема 1′. *При выполнении условий теоремы 1 для любых* $u^0 \in \overline{X}$, $y \in \overline{Y}$ *существует решение* $x = \xi \in \overline{X}$ *системы (5), удовлетворяющее неравенству*

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}\big(\xi, u^0\big) \leqslant A(I_m - BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Upsilon(u^0, u^0),\, y\big). \tag{6}$$

Теорему 1′ мы можем применить для исследования разрешимости системы (2), а значит, для получения условий существования периодических решений разностного уравнения (1). Сформулируем получаемое таким образом утверждение.

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\{\gamma_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *является* n *-периодической; метрическое пространство* X_i, $i = \overline{1, n}$, *полное; отображение* $\gamma_i : X^2 \to Y$, $i = \overline{1, n}$, *является замкнутым; существуют такие* α_i, β_i, $i = \overline{1, n}$, *что выполнены следующие условия:*

(2.1) *при каждом* $i = \overline{1, n}$, *любом* $v_i \in X$ *отображение* $\gamma_i(\cdot, v_i) : X \to Y$ *является* α_i *-накрывающим;*

(2.2) *при каждом* $i = \overline{1, n}$, *любых* $u, v \in X^n$ *справедливо неравенство*

$$\rho_Y\big(\gamma_i(v_{i(n)+1}, u_i),\, \gamma_i(v_{i(n)+1}, v_i)\big) \leqslant \beta_i \rho_X(u_i, v_i);$$

(2.3) *имеет место неравенство*

$$\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n > \beta_1 \ldots \beta_{n-1}\beta_n.$$

Тогда для любых n *-периодических последовательностей* $\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \subset Y$, $\{u_i^0\}_{i\in\mathbb{Z}} \subset X$ *существует* n *-периодическое решение* $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \subset X$ *разностного уравнения (1), удовлетворяющее оценке*

$$\rho_{X_1}\big(x_1, u_1^0\big) \leqslant \frac{1}{\beta_1\Delta}\big(\rho_{Y_1}(\gamma_1(u_2^0, u_1^0),\, y_1) + c_2c_3\ldots c_n\rho_{Y_2}(\gamma_2(u_3^0, u_2^0),\, y_2) + \ldots +$$
$$+c_n\rho_{Y_n}(\gamma_n(u_1^0, u_n^0),\, y_n)\big),$$

$$\rho_{X_2}\big(x_2,u_2^0\big) \leqslant \frac{1}{\beta_2\Delta}\big(\rho_{Y_2}(\gamma_2(u_3^0,u_2^0),\,y_2)+c_3\ldots c_nc_1\rho_{Y_3}(\gamma_3(u_{3(n)+1}^0,u_3^0),\,y_3)+\ldots+$$
$$+c_1\rho_{Y_1}(\gamma_1(u_2^0,u_1^0),\,y_1)\big),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$
$$\rho_{X_n}\big(x_n,u_n^0\big) \leqslant \frac{1}{\beta_n\Delta}\big(\rho_{Y_n}(\gamma_n(u_1^0,u_n^0),\,y_n)+c_1c_2\ldots c_{n-1}\rho_{Y_1}(\gamma_1(u_2^0,u_1^0),\,y_1)+\ldots+$$
$$+c_{n-1}\rho_{Y_{n-1}}(\gamma_{n-1}(u_n^0,u_{n-1}^0),\,y_{n-1})\big).$$

Здесь $c_i=\beta_i^{-1}\alpha_i,\ \ i=\overline{1,n},\ \ \Delta=c_1c_2\ldots c_n-1.$

Доказательство. Система (2) приводится к виду (5), если определить $\overline{X}=X^n$, $\overline{Y}=Y^m$ и задать отображение $\Upsilon: X^n\to Y^m$ равенством

$$\Upsilon(x,u)=\big(\gamma_1(x_2,u_1),\,\ldots,\,\gamma_{n-1}(x_n,u_{n-1}),\,\gamma_n(x_1,u_n)\big).$$

Это отображение в силу сделанных предположений (2.1), (2.2), (2.3) удовлетворяет соответствующим условиям (1.1), (1.2), (1.3) теоремы 1, с «матрицами накрывания и липшицевости» равными

$$A=\begin{pmatrix} 0 & {\alpha_1}^{-1} & \cdots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ 0 & 0 & \cdots & {\alpha_{n-1}}^{-1}\\ {\alpha_n}^{-1} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \beta_2 & \cdots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ 0 & 0 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Таким образом, согласно теореме $1'$ система (2) разрешима, и соответственно, разностное уравнение (1) имеет n-периодическое решение. Утверждаемая в теореме 2 оценка решения уравнения (1) прямо следует из неравенства (6) после подстановки в него матриц (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.

2. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.

3. *Жуковский Е.С., Жуковская Т.В.* О разрешимости дифференциального уравнения с запаздыванием, не разрешенного относительно производной // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. № 1. С. 67–69.

4. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439–455.

5. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Накрывающие отображения в проблеме корректности краевых задач для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2011. Т. 16. № 4. С. 1082-1085.

6. *Arutyunov, A.V., Zhukovskiy, S.E.* Existence of local solutions in constrained dynamic systems // Applicable Analysis. 2011. V. 90. № 5–6. P. 889–898.

7. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 31–56.

8.*Жуковский С.Е., Мингалеева З.Т.* О разрешимости управляемых систем // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2014. Т. 19. № 2. С. 380–383.

9. *Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S, Zhukovskii S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. P. 1026–1044.

10. *Жуковский С.Е.* Приложение накрывающих отображений к разностным уравнениям // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2011. Т. 16. № 4. С. 1085–1086.

11. *Arutyunov A., Pereira F., Zhukovskiy S.* Solvability of Implicit Difference Equations // CONTROLO'2014. Proceedings of the 11th Portuguese Conference on Automatic Control. Lecture Notes in Electrical Engineering. 2015. V. 321. P. 23–28.

12. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-97504) в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ (проект № 2014/285).

Поступила в редакцию 20 апреля 2015 г.

Zhukovskiy E.S., Zabrodskiy I.A., Shindiapin A.I. PERIODIC SOLUTIONS OF IMPLICIT DIFFERENTIAL EQUATIONS

We consider implicit difference equations in an arbitrary metric space, for which we formulate the conditions for existence of periodic solutions. The study is based on the results of vector covering mappings.

Key words: difference equation; periodic solutions; vector covering mapping of metric spaces; multiple coincidence points.

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор института математики, физики и информатики, e-mail: zukovskys@mail.ru

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Institute of Mathematics, Physics and Informatics, e-mail: zukovskys@mail.ru

Забродский Илья Алексеевич, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант кафедры алгебры и геометрии, e-mail: ilyatmb@yandex.ru

Zabrodskii Ilia Alekseevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Algebra and Geometry Department, e-mail: ilyatmb@yandex.ru

Шиндяпин Андрей Игоревич, Университет имени Эдуардо Мондлане, г. Мапуту, Мозамбик, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики и информатики, e-mail: andrei.olga@tvcabo.co.mz

Shindiapin Andrey Igorevich, Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Mathematics and Computer Science Department, e-mail: andrei.olga@tvcabo.co.mz

УДК 517.988

О ВОЗМУЩЕНИЯХ МНОГОЗНАЧНЫХ ВЕКТОРНО НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© Е.С. Жуковский, Ж.П. Мунембе

Ключевые слова: произведение метрических пространств; векторно накрывающие отображения метрических пространств; дифференциальное включение, краевая задача.

Для многозначных отображений, действующих в произведении метрических пространств, предложено понятие векторного накрывания. Получен векторный аналог теоремы о возмущениях накрывающих отображений. Этот результат применен к исследованию систем операторных включений неявного вида.