УДК 517.977.1, 517.988.6

ВЕКТОРНО НАКРЫВАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

© **Е. А. Плужникова**

Ключевые слова: векторно накрывающие отображения; метрические пространства; управляемые системы; обыкновенные дифференциальные уравнения неявного вида.

Предлагаются условия разрешимости, оценки решений систем с векторно накрывающими отображениями метрических пространств. На основании этих результатов исследуется управляемая дифференциальная система неявного вида со смешанными ограничениями на управление и дополнительными ограничениями на производную решения. Получены условия локальной разрешимости, непрерывной зависимости решений от параметров.

1. Векторно накрывающие отображения

Вначале приведем определение классического «скалярного» накрывания.

Пусть заданы метрические пространства (X,ρ_X), (Y,ρ_Y). Обозначим через $\mathrm{B}_X(u,r)$ замкнутый шар $\{x \in X : \rho_X(x,u) \leqslant r\}$ с центром в точке $u \in X$ радиуса $r \geqslant 0$ в пространстве X, аналогичное обозначение введем в пространстве Y.

Пусть задано число $\alpha > 0$.

О п р е д е л е н и е 1 [1]. Отображение $\Psi : X \to Y$ называется α*-накрывающим* (*накрывающим*), если для любых $r \geqslant 0$, $u \in X$ имеет место включение

$$\mathrm{B}_Y(\Psi(u),\alpha r) \subset \Psi(\mathrm{B}_X(u,r)).$$

Свойство α-накрывания равносильно следующему соотношению:

$$\forall\, u \in X \quad \forall\, y \in Y \quad \exists\, x \in X \quad \Psi(x) = y \ \ \& \ \ \rho_X(x,u) \leqslant \alpha^{-1}\rho_Y(y,\Psi(u)).$$

Нас будет интересовать проблема исследования систем уравнений, порождаемых векторными отображениями, действующими в произведении метрических пространств и являющимися по части аргументов накрывающими, а по остальным аргументам — липшицевыми. При попытке применения к таким системам результатов [1]–[3] о накрывающих отображениях возникают проблемы определения метрики в произведении пространств; нахождения условий гарантирующих, что накрывающее по некоторым аргументам отображение само будет обладать этим свойством (относительно метрики, введенной в произведениях пространств). К тому же метрика должна быть «удачной»: обеспечивать нужные соотношения между константами накрывания и липшицевости. Здесь предлагается другой подход: в произведениях метрических пространств мы не определяем метрику через метрики сомножителей, а пользуемся самим набором этих метрик.

Стандартно обозначим $\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное пространство, $\mathbb{R}^n_+$ — конус векторов с неотрицательными компонентами пространства $\mathbb{R}^n$, I_n — единичную $n \times n$ матрицу.

Пусть заданы метрические пространства (X_i,ρ_{X_i}), (Y_j,ρ_{Y_j}), $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$. Определим $\overline{X}=\prod_{i=1}^n X_i$, $\overline{Y}=\prod_{j=1}^m Y_j$, $\overline{\rho}_{\overline{X}}\doteq(\rho_{X_1},\ldots,\rho_{X_n})$, $\overline{\rho}_{\overline{Y}}\doteq(\rho_{Y_1},\ldots,\rho_{Y_m})$. Под сходимостью $x^k\to x$ при $k\to\infty$ в произведении $\overline{X}$ понимаем сходимость последовательностей компонент данных векторов, т. е. $\rho_{X_i}\big(x_i^k,x_i\big)\to 0$, $i=\overline{1,n}$, что равносильно сходимости $\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^k,x)\to 0$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Аналогично понимаем сходимость в $\overline{Y}$. В произведении $\overline{X}$ определим «векторный шар» — множество

$$\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u,r)\doteq\{x\in\overline{X}:\ \overline{\rho}_{\overline{X}}(x,u)\leqslant r\}=\prod_{i=1}^n \mathrm{B}_{X_i}(u_i,r_i),$$

где $r=(r_1,\ldots,r_n)\in\mathbb{R}^n_+$, $u=(u_1,\ldots,u_n)\in\overline{X}$. Аналогично, для $d=(d_1,\ldots,d_m)\in\mathbb{R}^m_+$, $w=(w_1,\ldots,w_m)\in\overline{Y}$ обозначим

$$\overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(w,d)\doteq\{y\in\overline{Y}:\ \overline{\rho}_{\overline{Y}}(y,w)\leqslant d\}=\prod_{j=1}^m \mathrm{B}_{Y_j}(w_j,d_j).$$

Пусть задана $n\times m$ матрица A с неотрицательными компонентами a_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$.

О п р е д е л е н и е 2. Отображение $\Psi:\overline{X}\to\overline{Y}$ будем называть *векторно* A*-накрывающим* (*векторно накрывающим*), если для любых $u\in\overline{X}$, $r\in\mathbb{R}^m_+$ имеет место включение

$$\overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Psi(u),r)\subset\Psi\big(\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u,Ar)\big).$$

При выполнении данного соотношения матрицу A будем называть *матрицей накрывания отображения* Ψ.

Заметим, что *отображение* $\Psi:\overline{X}\to\overline{Y}$ *является векторно* A*-накрывающим тогда и только тогда, когда*

$$\forall\, u\in\overline{X}\quad\forall\, y\in\overline{Y}\quad\exists\, x\in\overline{X}\quad\Psi(x)=y\ \ \&\ \ \overline{\rho}_{\overline{X}}(x,u)\leqslant A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(y,\Psi(u)).$$

Отметим, что при $n=m=1$ матрица A содержит лишь один элемент (a_{11}), в этом случае определения 1 и 2 равносильны, причем $a_{11}=\alpha^{-1}$.

Пусть определено отображение $\Upsilon=(\Upsilon_1,\Upsilon_2,\ldots,\Upsilon_m):\overline{X}^2\to\overline{Y}$ и задан вектор $y=(y_1,y_2,\ldots,y_m)\in\overline{Y}$. Рассмотрим систему

$$\Upsilon_j(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_1,x_2,\ldots,x_n)=y_j,\quad j=\overline{1,m},$$

относительно неизвестного $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\overline{X}$. Эту систему будем также записывать в виде векторного уравнения

$$\Upsilon(x,x)=y. \tag{1}$$

Пусть задана $m\times n$ матрица B с неотрицательными компонентами $b_{j\,i}$, $j=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,n}$. Отображение $\Phi:\overline{X}\to\overline{Y}$ будем называть *векторно* B*-липшицевым*, если для любых $u,x\in\overline{X}$ выполнено

$$\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(x),\Phi(u)\big)\leqslant B\,\overline{\rho}_{\overline{X}}(x,u).$$

Это условие означает, что для любых $l=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$ и $u,x\in\overline{X}$ таких, что $u_i=x_i$ при всех $i\neq l$, выполнено

$$\rho_{Y_j}\big(\Phi_j(x),\Phi_j(u)\big)\leqslant b_{j\,l}\,\rho_{X_l}(x_l,u_l).$$

Следующий результат — векторный аналог теоремы 1 работы [1].

Т е о р е м а 1. *Пусть пространства* X_i, $i=\overline{1,n}$, *являются полными и выполнены следующие условия:*

(**1.1**) *существует такая* $n \times m$ *матрица* A, *что при любом* $u \in \overline{X}$ *отображение* $\Upsilon(\cdot, u) : \overline{X} \to \overline{Y}$ *является векторно* A*-накрывающим;*

(**1.2**) *существует такая* $m \times n$ *матрица* B, *что при любом* $v \in \overline{X}$ *отображение* $\Upsilon(v, \cdot) : \overline{X} \to \overline{Y}$ *является векторно* B*-липшицевым;*

(**1.3**) *для произвольной последовательности* $\{v^k\} \subset \overline{X}$, *если имеют место сходимости* $\overline{\rho}_{\overline{X}}(v^k, u) \to 0$, $\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Upsilon(v^k, u), y\big) \to 0$, *то выполнено соотношение* $\Upsilon(u, u) = y$;

(**1.4**) *для спектрального радиуса* ϱ *квадратной матрицы* BA *выполнено* $\varrho(BA) < 1$.

Тогда для любого $u^0 \in \overline{X}$ *существует решение* $x = \xi \in \overline{X}$ *системы* (1), *удовлетворяющее неравенству*

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}\big(\xi, u^0\big) \leqslant A(I_m - BA)^{-1} \overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Upsilon(u^0, u^0), \, y\big). \tag{2}$$

Доказательство. Так как $(I_m - BA)^{-1} = I_m + BA + (BA)^2 + \ldots$ (см., например, [4, с. 116]), а матрицы A, B имеют неотрицательные компоненты, то при любом номере $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполнено

$$(I_m - BA)^{-1} \geqslant I_m + BA + \ldots + (BA)^k$$

(это неравенство понимается, естественно, как неравенство для соответствующих элементов матриц).

Выберем произвольный $u_0 \in \overline{X}$. Определим последовательность $x^k \in \overline{X}$ следующим образом.

Положим $x_0 = u_0$. В силу предположения (**1.1**) существует такой $x_1 \in \overline{X}$, что

$$\Upsilon(x^1, x^0) = y, \quad \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^1, x^0) \leqslant A \overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Upsilon(u^0, u^0), \, y\big).$$

Вследствие предположения (**1.2**) выполнено неравенство

$$\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Upsilon(x^1, x^1), \, y\big) \leqslant B \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^1, x^0).$$

Далее, снова в силу предположения (**1.1**) существует такой $x_2 \in \overline{X}$, что

$$\Upsilon(x^2, x^1) = y, \quad \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^2, x^1) \leqslant A \overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Upsilon(x^1, x^1), \, y\big).$$

Отсюда следует оценка

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^2, x^1) \leqslant ABA \overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Upsilon(u^0, u^0), \, y\big).$$

Повторяя подобные рассуждения, на каждом k-ом шаге ($k = 1, 2, \ldots$) будем определять элемент $x^k \in \overline{X}$, удовлетворяющий соотношениям:

$$\Upsilon(x^k, x^{k-1}) = y, \quad \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^k, x^{k-1}) \leqslant A(BA)^{k-1} \overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Upsilon(u^0, u^0), \, y\big).$$

Компоненты x_i^k векторов построенной последовательности при каждом $i = \overline{1, n}$ образуют в X_i фундаментальную последовательность. Действительно, из оценки $\varrho(BA) < 1$ следует сходимость $\|(BA)^k\|_{\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m} \to 0$ при $k \to \infty$; таким образом

$$\begin{aligned} \forall\, l = 1, 2, \ldots \quad \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k+l}, x^k) &\leqslant A(BA)^k \big(I_m + \ldots + (BA)^{l-1}\big) \overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Upsilon(u^0, \, u^0), y\big) \leqslant \\ &\leqslant A(BA)^k (I_m - BA)^{-1} \overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Upsilon(u^0, \, u^0), y\big) \to 0, \ \text{при}\, k \to \infty. \end{aligned}$$

Вследствие полноты пространств X_i последовательность $\{x^k\}$ сходится. Пусть последовательность $\{x^k\}$ сходится к $\xi \in \overline{X}$. Покажем, что ξ есть искомое решение системы (1).

Из соотношений

$$\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Upsilon(x^k, \, x^k), \, y\big) = \overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Upsilon(x^k, \, x^k), \, \Upsilon(x^k, \, x^{k-1})\big) \leqslant B \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^k, \, x^{k-1})$$

следует сходимость $\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Upsilon(x^k,x^k),\,y\big)\ \to\ 0$ при $k\ \to\ \infty.$ Таким образом, вследствие предположения $(\mathbf{1.3})$ имеем $\Upsilon(\xi,\xi)\ =\ y.$ Для доказательства теоремы остается заметить, что неравенство (2) следует из оценки

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^k,x_0)\leqslant A\big(I_m+\ldots+(BA)^{k-1}\big)\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Upsilon(u^0,\,u^0),y\big)\leqslant A(I_m-BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Upsilon(u^0,\,u^0),y\big).$$

С л е д с т в и е 1. *При выполнении условий теоремы 1 отображение* $F\,:\,\overline{X}\,\to\,\overline{Y},$ *определяемое формулой* $F(x)=\Upsilon(x,x),\ \ x\in\overline{X},$ *является векторно накрывающим, матрица накрывания этого отображения есть* $A(I_m-BA)^{-1}.$

2. Управляемые системы

Обозначим $\mathbf{d}_{\mathbb{R}^n}(x,H)\,=\,\inf\limits_{h\in H}|x-h|$ — расстояние в $\mathbb{R}^n$ от точки $x\,\in\,\mathbb{R}^n$ до множества $H\subset\mathbb{R}^n;$ $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ — пространство непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n.$ Пусть заданы $A_0\in\mathbb{R}^n,$ $[a,b]\subset\mathbb{R},$ измеримые многозначные отображения

$$\Omega:[a,b]\to\mathrm{cl}(\mathbb{R}^n),\quad U:[a,b]\to\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m),\quad V:[a,b]\to\mathrm{comp}(\mathbb{R}^{l_2}),$$

их измеримые сечения $\tilde\omega\,:\,[a,b]\,\to\,\mathbb{R}^n,$ $\tilde u\,:\,[a,b]\,\to\,\mathbb{R}^m,$ $\tilde v\,:\,[a,b]\,\to\,\mathbb{R}^{l_2}.$ Функцию $\tilde\omega$ будем предполагать суммируемой. Определим пространство $AC_\infty([a,b],\Omega,\tilde\omega)$ таких абсолютно непрерывных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n,$ что $\dot x\in L_\infty([a,b],\Omega,\tilde\omega),$ с метрикой $\rho_{AC_\infty}(x_1,x_2)=|x_1(a)-x_2(a)|+\rho_{L_\infty}(\dot{x_1},\dot{x_2}).$ Определим измеримую (см., например, [5, с. 71]) функцию $t\in[a,b]\mapsto\max\limits_{v\in V(t)}|v-\tilde v(t)|\in\mathbb{R}.$ Пусть эта функция существенно ограничена. Далее, пусть заданы удовлетворяющие условиям Каратеодори функции

$$f:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{l_1},\quad g:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{l_2}.$$

Рассмотрим управляемую систему

$$f\big(t,x(t),\dot x(t),u(t)\big)=0,\quad t\in[a,b],\quad x(a)=A_0,\tag{3}$$

со смешанными ограничениями на управление

$$u(t)\in U(t),\quad g\big(t,x(t),u(t)\big)\in V(t),\quad t\in[a,b],\tag{4}$$

и дополнительным ограничением на производную решения

$$\dot x(t)\in\Omega(t),\quad t\in[a,b].\tag{5}$$

Если для некоторого значения $\tau\ \in\ (0,b-a]$ существует пара функций $(x,u)\ \in\ \in AC_\infty([a,a+\tau],\Omega,\tilde\omega)\times L_\infty([a,a+\tau],U,\tilde u),$ удовлетворяющая при п.в. $t\in[a,a+\tau]$ уравнению (3) и включениям (4),(5), то управляемую систему (3)–(5) будем называть *локально разрешимой.* Сформулируем условия локальной разрешимости этой системы.

Пусть задано $\sigma>0.$ Положим $D=B_{\mathbb{R}^n}(A_0,\sigma).$ При каждом $t\in[a,b]$ определим множество

$$H(t)=\Big(\bigcap_{x\in D}g\big(t,x,U(t)\big)\Big)\bigcap V(t).$$

Относительно функций $f,$ g будем предполагать выполненным следующее условие: для произвольного $r>0$ существует такое $R>0,$ что при п.в. $t\in[a,b]$ и любых $x,z\in\mathbb{R}^n,$ $u\in\mathbb{R}^m,$ если $|x-A_0|\leqslant\sigma,$ $|z-\tilde\omega(t)|\leqslant r,$ $|u-\tilde u(t)|\leqslant r,$ то имеют место неравенства

$$|f(t,x,z,u)|\leqslant R,\quad |g(t,x,u)-\tilde v(t)|\leqslant R.$$

Основной результат о локальной разрешимости управляемой системы (3)–(5) предварим следующим вспомогательным утверждением.

Л е м м а 1. *Пусть при п.в.* $t \in [a,b]$ *множество* $H(t)$ *не пусто. Тогда многозначное отображение* $H : [a,b] \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^{l_2})$ *измеримо и для произвольной функции* $w \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^{l_2},\tilde{v})$ *функция* $t \in [a,b] \mapsto \mathbf{d}_{\mathbb{R}^{l_2}}\big(w(t),H(t)\big) \in \mathbb{R}_+$ *измерима и существенно ограничена.*

Отметим, что утверждаемая в лемме 1 измеримость многозначного отображения $H : [a,b] \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^{l_2})$ позволяет записать ограничения (4) в виде уравнения

$$g\big(t,x(t),u(t)\big) = \eta(t), \quad t \in [a,b],$$

где функция $\eta : [a,b] \to \mathbb{R}^{l_2}$ — любой измеримый селектор отображения H и поэтому удовлетворяет включениям $\eta(t) \in V(t)$, $\eta(t) \in g(t,x,U(t))$ при п.в. $t \in [a,b]$ и любых $x \in D$. Таким образом, исследуемая управляемая система сводится к системе уравнений в соответствующих метрических пространствах функций, к которой применимы рассмотренные выше результаты. Далее, для произвольной функции $w \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^{l_2},\tilde{v})$ можно в качестве измеримого селектора отображения H выбрать функцию η_0, реализующую расстояние $\mathbf{d}_{\mathbb{R}^{l_2}}\big(w(t),H(t)\big)$, т. е. удовлетворяющую при п.в. $t \in [a,b]$ равенству $|w(t)-\eta_0(t)| = \mathbf{d}_{\mathbb{R}^{l_2}}\big(w(t),H(t)\big)$ (см., например, [6]). Этот факт полезен для нахождения оценок решения управляемой системы.

Реализуя описанную схему, получаем следующие условия локальной разрешимости управляемой системы (3)–(5).

Т е о р е м а 2. *Пусть при п.в.* $t \in [a,b]$ *множество* $H(t)$ *не пусто. Пусть существуют такие числа* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta_1 \geqslant 0$, $\beta_2 \geqslant 0$, *что при п.в.* $t \in [a,b]$ *и любых* $x \in D$, $u \in U(t)$, $z \in \Omega(t)$ *выполнены условия: отображение* $f(t,x,\cdot,u) : \Omega(t) \to \mathbb{R}^{l_1}$ *является* α_1*-накрывающим; отображение* $f(t,\cdot,z,\cdot) : D \times U(t) \to \mathbb{R}^{l_1}$ *является* β_1*-липшицевым; отображение* $g(t,x,\cdot) : U(t) \to \mathbb{R}^{l_2}$ *является* α_2*-накрывающим; отображение* $g(t,\cdot,u) : D \to \mathbb{R}^{l_2}$ *является* β_2*-липшицевым.*

Тогда управляемая система (3)–(5) *локально разрешима. Кроме того, при любом* $\tau \in \big(0,(\beta_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)^{-1}\alpha_1\alpha_2\big)$, *для произвольной пары* $(v_0,u_0) \in L_\infty([a,a+\tau],\Omega,\tilde{\omega})\times$ $\times L_\infty([a,a+\tau],U,\tilde{u})$, *первая компонента которой отвечает неравенству* $\int_a^\tau |v_0(s)|\,ds \leqslant \sigma$, *существует решение* $(x,u) \in AC_\infty([a,a+\tau],\Omega,\tilde{\omega}) \times L_\infty([a,a+\tau],U,\tilde{u})$ *управляемой системы* (3)–(5), *компоненты которого удовлетворяют оценкам*

$$\begin{aligned}\Big(1-\tau\frac{\beta_1}{\alpha_1}-\tau\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\Big)\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,a+\tau]}\big|\dot{x}(t)-v_0(t)\big| &\leqslant \frac{1}{\alpha_1}\phi_1+\frac{\beta_1}{\alpha_1\alpha_2}\phi_2,\\ \Big(1-\tau\frac{\beta_1}{\alpha_1}-\tau\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\Big)\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,a+\tau]}\big|u(t)-u_0(t)\big| &\leqslant \frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\phi_1+\Big(\frac{1}{\alpha_2}-\tau\frac{\beta_1}{\alpha_1\alpha_2}\Big)\phi_2.\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь

$$\phi_1 = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,a+\tau]}\Big|f\Big(t,\,A_0+\int_a^t v_0(s)\,ds,\,v_0(t),u_0(t)\Big)\Big|,$$

$$\phi_2 = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,a+\tau]}\mathbf{d}_{\mathbb{R}^{l_2}}\big(w_0(t),H(t)\big), \quad w_0(t) = g\Big(t,\,A_0+\int_a^t v_0(s)\,ds,u_0(t)\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим отображения

$$\Upsilon_1 : \big(L_\infty([a,a+\tau],\Omega,\tilde\omega)\times L_\infty([a,a+\tau],U,\tilde u)\big)^2 \to L_\infty([a,a+\tau],\mathbb{R}^{l_1}),$$
$$(\Upsilon_1(w_1,w_2,v_1,v_2))(t) = f\Big(t,\big(A_0+\int\limits_a^t v_1(s)\,ds\big), w_1(t), v_2(t)\Big);$$
$$\Upsilon_2 : \big(L_\infty([a,a+\tau],\Omega,\tilde\omega)\times L_\infty([a,a+\tau],U,\tilde u)\big)^2 \to L_\infty([a,a+\tau],\mathbb{R}^{l_2},\tilde v),$$
$$(\Upsilon_2(w_1,w_2,v_1,v_2))(t) = g\Big(t,\big(A_0+\int\limits_a^t v_1(s)\,ds\big), w_2(t)\Big).$$

Обозначим $z_1=\dot x,\ \ z_2=u,$ и относительно неизвестного

$$z=(z_1,z_2)\in L_\infty([a,a+\tau],\Omega,\tilde\omega)\times L_\infty([a,a+\tau],U,\tilde u)$$

перепишем управляемую систему (3)–(5) в виде следующей системы двух уравнений

$$\Upsilon_1(z_1,z_2,z_1,z_2)=0,\quad \Upsilon_2(z_1,z_2,z_1,z_2)=\eta_0, \tag{7}$$

где функция η_0 реализует расстояние $\mathbf{d}_{\mathbb{R}^{l_2}}\big(w_0(t),H(t)\big)$.

Для доказательства теоремы покажем, что определенное здесь отображение $\Upsilon=(\Upsilon_1,\Upsilon_2)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Имеем:

– при любых $v\in L_\infty([a,a+\tau],\Omega,\tilde\omega)\times L_\infty([a,a+\tau],U,\tilde u)$ отображение

$$\Upsilon(\cdot,v): L_\infty([a,a+\tau],\Omega,\tilde\omega)\times L_\infty([a,a+\tau],U,\tilde u)\to L_\infty([a,a+\tau],\mathbb{R}^{l_1})\times L_\infty([a,a+\tau],\mathbb{R}^{l_2},\tilde v)$$

является векторно A-накрывающим, где $A=\begin{pmatrix} 1/\alpha_1 & 0\\ 0 & 1/\alpha_2\end{pmatrix}$;

– при любых $w\in L_\infty([a,a+\tau],\Omega,\tilde\omega)\times L_\infty([a,a+\tau],U,\tilde u)$ отображение

$$\Upsilon(w,\cdot): L_\infty([a,a+\tau],\Omega,\tilde\omega)\times L_\infty([a,a+\tau],U,\tilde u)\to L_\infty([a,a+\tau],\mathbb{R}^{l_1})\times L_\infty([a,a+\tau],\mathbb{R}^{l_2},\tilde v)$$

является векторно B-липшицевым, где $B=\begin{pmatrix} \tau\beta_1 & \beta_1\\ \tau\beta_2 & 0\end{pmatrix}$.

Для спектрального радиуса ϱ матрицы $BA=\begin{pmatrix} \frac{\tau\beta_1}{\alpha_1} & \frac{\beta_1}{\alpha_2}\\ \frac{\tau\beta_2}{\alpha_1} & 0\end{pmatrix}$ выполнено $\varrho(BA)<1$, если $\tau<(\beta_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)^{-1}\alpha_1\alpha_2$ (что и предполагается в доказываемой теореме). Таким образом, выполнены все предположения теоремы 1, существует решение системы (7), а следовательно, локально разрешима и исходная управляемая система (3)–(5).

Для получения оценок решений найдем матрицы

$$(I_2-BA)^{-1}=\Big(1-\tau\frac{\beta_1}{\alpha_1}-\tau\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\Big)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta_1}{\alpha_2}\\ \frac{\tau\beta_2}{\alpha_1} & 1-\frac{\tau\beta_1}{\alpha_1}\end{pmatrix};$$

$$A(I_2-BA)^{-1}=\Big(1-\tau\frac{\beta_1}{\alpha_1}-\tau\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\Big)^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & \frac{\beta_1}{\alpha_1\alpha_2}\\ \frac{\tau\beta_2}{\alpha_1\alpha_2} & \frac{1}{\alpha_2}-\frac{\tau\beta_1}{\alpha_1\alpha_2}\end{pmatrix};$$

Остается подставить найденные матрицы в неравенство (2), и мы получим требуемые оценки (6). Теорема доказана.

Поскольку в теореме 2 утверждается существование «локального» решения, то условия этой теоремы можно ослабить, требуя их выполнения не при п.в. $t \in [a,b]$, а лишь для $t \in [a, a+\bar{\tau}]$ при некотором $\bar{\tau} \in (0, b-a)$.

Исследуем непрерывную зависимость от параметров решений управляемой дифференциальной системы (3)–(5).

Пусть заданы: числа $A_0^k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots$; измеримые многозначные отображения

$$\Omega : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n), \quad U : [a,b] \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m), \quad V_k : [a,b] \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^{l_2}),$$

их измеримые сечения $\tilde{\omega} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{u} : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{v}^k : [a,b] \to \mathbb{R}^{l_2}$, $k = 1, 2, \dots$. Функцию $\tilde{\omega}$ будем предполагать суммируемой; а измеримую функцию $t \in [a,b] \mapsto \max\limits_{v \in V_k(t)} |v - \tilde{v}(t)| \in \mathbb{R}$ существенно ограниченной. Далее, пусть при любом $k = 1, 2, \dots$ определены удовлетворяющие условиям Каратеодори функции

$$f_k : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{l_1}, \quad g_k : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{l_2},$$

относительно которых, кроме того, предполагаем, что для любого $r > 0$ существует такое $R_k > 0$, что при п.в. $t \in [a,b]$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \Omega(t)$, $u \in U(t)$, удовлетворяющих условию $|x| + |z| + |u| \leqslant r$, имеют место неравенства $|f_k(t,x,z,u)| \leqslant R_k$, $|g_k(t,x,u)| \leqslant R_k$.

Рассмотрим последовательность управляемых систем

$$f_k\big(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)\big) = 0, \quad x(a) = A_0^k, \tag{8}$$

$$u(t) \in U(t), \quad g_k\big(t, x(t), u(t)\big) \in V_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{9}$$

$$\dot{x}(t) \in \Omega(t), \quad t \in [a,b]. \tag{10}$$

Пусть для некоторой пары функций $(x^0, u^0) \in AC_\infty([a,b], \Omega) \times L_\infty([a,b], U)$ при $k \to \infty$ имеют место соотношения

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [a,b]} \big| f_k\big(t, x^0(t), \dot{x}^0(t), u^0(t)\big) \big| \to 0, \quad A_0^k \to x^0(a),$$

$$H_k(t) = \Big(\bigcap_{x \in D(t)} g_k\big(t, x, U(t)\big) \Big) \bigcap V_k(t) \neq \varnothing,$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [a,b]} \varrho_{\mathbb{R}^{l_2}} \big(g_k\big(t, x^0(t), u^0(t)\big),\, H_k(t) \big) \to 0. \tag{11}$$

Получим условия, обеспечивающие существование при любом натуральном k такого решения $(x_m, u_m) \in AC_\infty([a,b], \Omega) \times L_\infty([a,b], U)$ управляемой системы (8)–(10), что последовательность (x^k, u^k) сходится к (x^0, u^0) в пространстве $AC_\infty([a,b], \Omega) \times L_\infty([a,b], U)$.

Положим $D^0(t) = B_{\mathbb{R}^n}(x^0(t), \sigma)$, $\sigma > 0$.

Т е о р е м а 3. *Пусть существуют такие числа* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta_1 \geqslant 0$, $\beta_2 \geqslant 0$, *что при п.в.* $t \in [a,b]$ *и любых* $x \in D^0(t)$, $u \in U(t)$, $z \in \Omega(t)$, $k = 1, 2, \dots$ *выполнены условия: отображение* $f_k(t, x, \cdot, u) : \Omega(t) \to \mathbb{R}^{l_1}$ *является* α_1*-накрывающим; отображение* $f_k(t, \cdot, z, \cdot) : D \times U(t) \to \mathbb{R}^{l_1}$ *является* β_1*-липшицевым; отображение* $g_k(t, x, \cdot) : U(t) \to \mathbb{R}^{l_2}$ *является* α_2*-накрывающим; отображение* $g_k(t, \cdot, u) : D \to \mathbb{R}^{l_2}$ *является* β_2*-липшицевым.*

Тогда, если справедливы соотношения (11), *то для всех достаточно больших значений* k *управляемая система* (8)–(10) *разрешима на всем* $[a,b]$, *и существует такое ее решение* $(x^k, u^k) \in AC_\infty([a,b], \Omega) \times L_\infty([a,b], U)$, *что имеет место сходимость* $(x^k, u^k) \to (x^0, u^0)$ (*в пространстве* $AC_\infty([a,b], \Omega) \times L_\infty([a,b], U)$) .

Д о к а з а т е л ь с т в о существования решения управляемой системы (8)–(10) при каждом натуральном k следует из теоремы 1, применяемой к системе операторных уравнений

$$\Upsilon_1^k(z_1, z_2, z_1, z_2) = 0, \quad \Upsilon_2^k(z_1, z_2, z_1, z_2) = \eta_0^k,$$

где

$$\Upsilon_1^k : \big(L_\infty([a,a+\tau],\Omega,\tilde\omega)\times L_\infty([a,a+\tau],U,\tilde u)\big)^2 \to L_\infty([a,a+\tau],\mathbb{R}^{l_1}),$$
$$(\Upsilon_1^k(w_1,w_2,v_1,v_2))(t) = f^k\Big(t, \big(A_0 + \int\limits_a^t v_1(s)\,ds\big), w_1(t), v_2(t)\Big);$$

$$\Upsilon_2^k : \big(L_\infty([a,a+\tau],\Omega,\tilde\omega)\times L_\infty([a,a+\tau],U,\tilde u)\big)^2 \to L_\infty([a,a+\tau],\mathbb{R}^{l_2},\tilde v),$$
$$(\Upsilon_2^k(w_1,w_2,v_1,v_2))(t) = g^k\Big(t, \big(A_0 + \int\limits_a^t v_1(s)\,ds\big), w_2(t)\Big);$$

элемент $\eta_0^k \in H_k$ реализует расстояние $\mathbf{d}_{\mathbb{R}^{l_2}}\big(w_0^k(t), H_k(t)\big), w_0^k(t) = g_k\Big(t, A_0 + \int\limits_a^t \dot x_0(s)ds, u_0(t)\Big).$

Сходимость $(x^k,u^k)\to(x^0,u^0)$ следует из оценок (6) решения (x^k,u^k) и предельных соотношений (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
2. *Арутюнов А.В.* Устойчивость точек совпадения и многозначные накрывающие отображения в метрических пространствах // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427. № 5. С. 583–585.
3. *Арутюнов А.В.* Точки совпадения двух отображений // Функциональный анализ и его приложения. 2014. Т. 48. № 1. С. 89–93.
4. *Крейн С.Г.* Функциональный анализ. М., 1972. 544 с.
5. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М., 2011. 224 с.
6. *Himmelberg C.J., Van Vleck F.S.* Lipschitzian generalized differential gathers // Rend. Sem. Mat. Padova. 1972. V. 48. C. 159–169.

БЛАГОДАРНОСТИ: Благодарю профессора А.В. Арутюнова за замечания, критику, советы. Работа поддержана грантом РФФИ № 14-31-50181.

Поступила в редакцию 16 декабря 2014 г.

Pluzhnikova E.A. THE VEKTOR COVERING MAPPINGS IN CONTROL PROBLEMS FOR SYSTEMS OF IMPLICIT DIFFERENTIAL EQUATIONS

Conditions that guarantee solvability, estimates of the solutions to systems of the vektor covering mappings in metric spaces are offered. On the basis of these results the controlled implicit differential system with mixed constraints on control and an additional constraint on the solution's derivative is investigated. Conditions that guarantee local solvability, continuous dependence of the solutions on parameters are obtained.

Key words: the vektor covering mappings; metric spaces; controlled systems; the ordinary differential equations of an implicit look.

Плужникова Елена Александровна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии, e-mail: pluznikova_ elena@mail.ru

Pluzhnikova Elena Aleksandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor of Algebra and Geometry Department, e-mail: pluznikova_ elena@mail.ru