

УДК 519.7

# ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ОДНИМ КЛАССОМ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПО КВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ

© А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба, И.И. Емельянова

*Ключевые слова:* метод последовательных приближений; локальная задача оптимального управления нелинейной системой по квадратичному критерию; субоптимальное управление на произвольном конечном горизонте.

Приведен метод синтеза оптимального управления с обратной связью одним классом нелинейных систем по квадратичному критерию. Данный метод базируется на специальном методе последовательных приближений, сходимость которого позволяет доказать существование оптимального управления и получить процедуру его построения.

## 1. Введение

Рассмотрим нелинейную динамическую систему, характеризуемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x, u), \quad (1)$$

в котором  $x = (x^1, \dots, x^n)$  –  $n$ -мерный действительный вектор состояния,  $u = (u^1, \dots, u^m)$  –  $m$ -мерный действительный вектор управления,  $A$  и  $B$  – действительные  $(n \times n)$ - и  $(n \times m)$ -матрицы, а  $f = (f^1, \dots, f^n)$  – векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

и

$$\frac{\partial f^i}{\partial u^j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m,$$

в пространстве  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

Предположим, что начальное состояние

$$x(0) = c \quad (2)$$

задано, а задача управления системой (1) заключается в минимизации функционала

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T [\langle e(t), Qe(t) \rangle + \langle u(t), Ru(t) \rangle] dt + \frac{1}{2} \langle e(T), Pe(T) \rangle, \quad (3)$$

в котором  $T$  – фиксированное конечное время,  $Q$  и  $P$  – положительные полуопределенные  $(n \times n)$ -матрицы,  $R$  – положительно определенная  $(m \times m)$ -матрица,

$$e(t) = x(t) - z(t)$$

– ошибка системы и  $z = (z^1, \dots, z^n)$  – заданный режим функционирования.

Легко видеть, что непосредственное применение принципа максимума Л.С. Понтрягина к рассматриваемой задаче приводит к достаточно сложной краевой задаче, если только

(1)–(3) не сводится к линейно-квадратичной задаче слежения (см., например, [1, с. 657]). Однако, во многих практических ситуациях режим  $z(t)$  устроен так, что указанное сведение невозможно.

В общем случае для получения решения (или оценок решения) задачи (1)–(3) используют самые разные методы (см., например, [2, гл. 18] и [3–9]). Одним из основных методов здесь является метод последовательных приближений, описанный в [2, гл. 18]. Внешне простой и понятный, он (метод) сводит исходную задачу к некоторой последовательности линейно-квадратичных задач. Вместе с тем, указанный метод до сих пор не получил широкого распространения, поскольку его сходимость не доказана. Последнее, в частности, объясняется тем, что здесь в схеме последовательных приближений оператор системы меняется от итерации к итерации.

Целью настоящей работы является получение решения задачи (1)–(3) в виде закона управления с обратной связью. Для получения искомого решения используется процедура, являющаяся модификацией метода [2, гл. 18] и заключающаяся в создании некоторой специальным образом генерируемой последовательности вспомогательных линейно-квадратичных задач. Это позволяет в некоторых случаях установить сходимость метода, а из сходимости доказать существование оптимального управления и получить процедуру его построения.

## 2. Вспомогательные задачи

Формально опишем метод последовательных приближений, на котором будут базироваться все дальнейшие построения.

Следуя [9], для всех  $N = 0, 1, \dots$  рассмотрим вспомогательную задачу о минимизации функционала

$$J_{N+1}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T [\langle e(t), Qe(t) \rangle + \langle u(t), Ru(t) \rangle] dt + \frac{1}{2} \langle e(T), Pe(T) \rangle \quad (4)$$

с ограничением

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x_N, u_N), \quad x(0) = c, \quad (5)$$

где  $x_N$  и  $u_N$  – некоторые функции, определенные и непрерывные на отрезке  $[0, T]$ .

Для фиксированных  $x_N$  и  $u_N$  оптимальное управление  $u_{N+1}(t)$  в задаче (4), (5) дается законом управления с обратной связью

$$u_{N+1}(t) = R^{-1}B'[h_{N+1}(t) - K(t)x_{N+1}(t)], \quad (6)$$

в котором  $x_{N+1}(t)$  – решение уравнения (5), соответствующее  $u_{N+1}(t)$  и удовлетворяющее начальному условию

$$x_{N+1}(0) = c,$$

$K(t)$  – решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{K}(t) = -K(t)A - A'K(t) + K(t)BR^{-1}B'K(t) - Q \quad (7)$$

с граничным условием

$$K(T) = P, \quad (8)$$

а  $h_{N+1}(t)$  – решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{h}_{N+1}(t) = -[A - BR^{-1}B'K(t)]'h_{N+1}(t) - Qz(t) + K(t)f(x_N(t), u_N(t)) \quad (9)$$

с граничным условием

$$h_{N+1}(T) = Pz(T) \quad (10)$$

(см. [1, с. 699]).<sup>1</sup>

Таким образом, если начальное приближение  $x_0(t), u_0(t)$  задано, то соотношения (4)–(10) определяют схему последовательных приближений, которая, как будет показано ниже, при всех достаточно малых значениях  $T$  позволяет установить существование решения задачи (1)–(3) и дает эффективную процедуру построения этого решения. Отметим также, что для простоты начальное приближение здесь будет определено соотношениями

$$x_0(t) \equiv c \quad (11)$$

и

$$u_0(t) \equiv R^{-1}B'[Pz(T) - K(t)c]. \quad (12)$$

**Замечание 1.** Автономность системы (1) и постоянство матриц  $Q$  и  $R$  в настоящей работе нигде не используются и приняты для простоты обозначений.

### 3. Локальная задача

Применим метод (6)–(12) для изучения простейшего варианта задачи (1)–(3), в котором значение  $T$  предполагается достаточно малым. Такую задачу будем называть локальной.

Существование и структуру оптимального управления в локальной задаче (1)–(3) устанавливает следующая

**Теорема 1.** Пусть  $c$  – произвольная точка пространства  $\mathbb{R}^n$ . Тогда найдется такое положительное число  $\mathfrak{T}$ , что для всех  $T \in (0, \mathfrak{T})$  существует оптимальное управление  $u^*(t)$  в задаче (1)–(3). При этом для всех  $t \in [0, T]$

$$u^*(t) = R^{-1}B'[h^*(t) - K(t)x^*(t)], \quad (13)$$

где  $x^*(t)$  – решение уравнения

$$\dot{x}^* = Ax^* + Bu^* + f(x^*, u^*) \quad (14)$$

с начальным условием

$$x^*(0) = c, \quad (15)$$

а  $h^*(t)$  – решение уравнения

$$\dot{h}^*(t) = -[A - BR^{-1}B'K(t)]'h^*(t) - Qz(t) + K(t)f(x^*(t), u^*(t)) \quad (16)$$

с граничным условием

$$h^*(T) = Pz(T). \quad (17)$$

**Доказательство.** Пусть  $X(t)$  и  $H(t)$  – решения линейных матричных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = [A - BR^{-1}B'K(t)]X, \quad X(0) = E,$$

и, соответственно,

$$\dot{H} = -[A - BR^{-1}B'K(t)]'H, \quad H(T) = E,$$

<sup>1</sup>Здесь в книге [1] имеет место очевидная опечатка.

где  $E$  – единичная  $(n \times n)$ -матрица. Тогда при использовании управления (6) уравнение (5) эквивалентно уравнению

$$x_{N+1}(t) = X(t)c + \int_0^t X(t-\tau)[BR^{-1}B'h_{N+1}(\tau) + f(x_N(\tau), u_N(\tau))] d\tau, \quad (18)$$

а уравнение (9) с граничным условием (10) – уравнению

$$h_{N+1}(t) = H(t)Pz(T) + \int_T^t H(t-\tau)(K(\tau)f(x_N(\tau), u_N(\tau)) - Qz(\tau)) d\tau. \quad (19)$$

Принимая во внимание (19), перепишем уравнение (18) в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} x_{N+1}(t) = X(t)c + \int_0^t X(t-\tau)\{f(x_N(\tau), u_N(\tau)) + BR^{-1}B'[H(\tau)Pz(T) + \\ + \int_T^\tau H(\tau-s)(K(s)f(x_N(s), u_N(s)) - Qz(s)) ds]\} d\tau. \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда с учетом (6) система (18), (19) может быть представлена в символической форме

$$x_{N+1}(t) = X(t)c + \int_0^t [f_1(t, \tau, x_N(\tau), h_N(\tau)) + \int_t^T f_2(\tau, s, x_N(s), h_N(s)) ds] d\tau, \quad (21)$$

$$h_{N+1}(t) = H(t)h_0 + \int_t^T f_3(t, \tau, x_N(\tau), h_N(\tau)) d\tau, \quad (22)$$

где

$$h_0 = Pz(T),$$

а  $f_1 = (f_1^1, \dots, f_1^n)$ ,  $f_2 = (f_2^1, \dots, f_2^n)$  и  $f_3 = (f_3^1, \dots, f_3^n)$  – векторные функции, определенные и непрерывные вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f_l^i}{\partial x^j}, \quad \frac{\partial f_l^i}{\partial h^j}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad l = 1, 2, 3,$$

в пространстве  $[0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^{2n}$  и задаваемые подынтегральными функциями в равенствах (20) и (19) соответственно.

Пусть теперь  $a$  – некоторое положительное число. Обозначим через  $\Sigma$  – множество точек  $(t, x, h) \in \mathbb{R}^{1+2n}$ , для которых выполнены неравенства

$$0 \leq t \leq T, \quad |x - c| \leq a, \quad |h - h_0| \leq a, \quad (23)$$

где  $|y|$  – длина вектора  $y$ . Так как  $\Sigma$  – компактное множество, то найдутся такие положительные числа  $M$  и  $L$ , что для всех значений  $t, x$  и  $h$ , удовлетворяющих условиям (23), при  $\tau \in [0, T]$  выполнены неравенства

$$|f_l(t, \tau, x, h)| \leq M, \quad l = 1, 2, 3, \quad (24)$$

и

$$\left| \frac{\partial f_l^i(t, \tau, x, h)}{\partial x^j} \right| \leq L, \quad \left| \frac{\partial f_l^i(t, \tau, x, h)}{\partial h^j} \right| \leq L, \quad (25)$$

$$i, j = 1, \dots, n, \quad l = 1, 2, 3.$$

Обозначим через  $\Omega$  множество всех непрерывных пар  $(x, h)$  функций, определенных на отрезке  $[0, T]$ , принимающих значения в пространстве  $\mathbb{R}^n$  и при  $t \in [0, T]$  удовлетворяющих условиям

$$|x(t) - c| \leq a, \quad |h(t) - h_0| \leq a, \quad (26)$$

т. е.  $\Omega$  – множество непрерывных пар  $(x, h)$  функций, графики которых лежат в  $\Sigma$ . При этом будем рассматривать часть  $\Omega_T$  множества  $\Omega$ , такую, что наряду с неравенствами (26) при  $(x, h) \in \Omega_T$  выполнялись бы также неравенства

$$|X(t)c - c| \leq \frac{a}{2}, \quad |H(t)h_0 - h_0| \leq \frac{a}{2} \quad (27)$$

и

$$|x(t) - X(t)c| \leq \frac{a}{2}, \quad |h(t) - H(t)h_0| \leq \frac{a}{2}. \quad (28)$$

Тогда в силу неравенств

$$|x(t) - c| \leq |x(t) - X(t)c| + |X(t)c - c|$$

и

$$|h(t) - h_0| \leq |h(t) - H(t)h_0| + |H(t)h_0 - h_0|$$

из условий (27) и (28) следуют неравенства (26) и, таким образом, принадлежность пары  $(x, h)$  множеству  $\Omega_T$ .

Для всех  $t \in [0, T]$  положим

$$\varphi(t) = (x(t), h(t))$$

и будем говорить, что  $\varphi \in \Omega_T$ , если  $(x, h) \in \Omega_T$ . Обозначим через  $F$  оператор, задаваемый правыми частями системы (21), (22). Тогда, как легко видеть, если число  $T$  достаточно мало, то из принадлежности  $\varphi$  множеству  $\Omega_T$  следует принадлежность множеству  $\Omega_T$  функции

$$\varphi^* = F\varphi, \quad (29)$$

где  $\varphi^* = (x^*, h^*)$ .

В самом деле, для того чтобы функция  $\varphi^*$ , задаваемая соотношением (29), принадлежала множеству  $\Omega_T$ , достаточно, чтобы при выполнении условия (27) для всех  $t \in [0, T]$  были выполнены также и неравенства

$$|x^*(t) - X(t)c| \leq \frac{a}{2}, \quad |h^*(t) - H(t)h_0| \leq \frac{a}{2}.$$

Но в силу (21), (22) и (24) имеем

$$|h^*(t) - H(t)h_0| = \left| \int_t^T f_3(t, \tau, x(\tau), h(\tau)) d\tau \right| \leq MT$$

и

$$|x^*(t) - X(t)c| = \left| \int_0^t [f_1(t, \tau, x(\tau), h(\tau)) + \int_t^T f_2(\tau, s, x(s), h(s)) ds] d\tau \right| \leq$$

$$\leq M(T+1)T.$$

Отсюда следует, что при

$$M(T+1)T \leq \frac{a}{2} \quad (30)$$

условие, предъявляемое к оператору  $F$  в (29), выполнено.

Пусть теперь  $\varphi = (x, h)$  и  $\psi = (y, g)$  – две произвольные функции, принадлежащие множеству  $\Omega_T$ . Тогда при выполнении неравенства (30) функции

$$\varphi^* = F\varphi$$

и

$$\psi^* = F\psi$$

также принадлежат  $\Omega_T$ , где  $\varphi^* = (x^*, h^*)$  и  $\psi^* = (y^*, g^*)$ . Тогда справедливо неравенство

$$\|\varphi^* - \psi^*\| \leq \|F\varphi - F\psi\| \leq k\|\varphi - \psi\|, \quad (31)$$

в котором

$$\|\mu\| = \max_{0 \leq t \leq T} |\mu(t)|$$

и  $k$  – положительное число, зависящее только от значения  $T$ . При этом для всех достаточно малых  $T > 0$

$$k < 1. \quad (32)$$

В самом деле, в силу неравенств (25) для всех  $t \in [0, T]$  и  $\tau \in [0, T]$

$$\begin{aligned} & |f_l(t, \tau, x(\tau), h(\tau)) - f_l(t, \tau, y(\tau), g(\tau))| \leq \\ & \leq \lambda(|x(\tau) - y(\tau)| + |h(\tau) - g(\tau)|), \quad l = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (33)$$

где  $\lambda$  – некоторое положительное число, зависящее только от  $L$  (см. [10, с. 163]). Поэтому

$$\begin{aligned} & \left| \int_t^T [f_3(t, \tau, x(\tau), h(\tau)) - f_3(t, \tau, y(\tau), g(\tau))] d\tau \right| \leq \\ & \leq \lambda \left( \int_t^T |x(\tau) - y(\tau)| d\tau + \int_t^T |h(\tau) - g(\tau)| d\tau \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Но для всех  $t \in [0, T]$

$$|x(t) - y(t)| \leq |\varphi(t) - \psi(t)| \leq \|\varphi - \psi\| \quad (35)$$

и

$$|h(t) - g(t)| \leq |\varphi(t) - \psi(t)| \leq \|\varphi - \psi\|. \quad (36)$$

Тогда, если

$$h^*(t) = H(t)h_0 + \int_t^T f_3(t, \tau, x(\tau), h(\tau)) d\tau$$

и

$$g^*(t) = H(t)h_0 + \int_t^T f_3(t, \tau, x(\tau), g(\tau)) d\tau,$$

то в силу неравенств (34)–(36)

$$\|h^* - g^*\| \leq 2\lambda T \|\varphi - \psi\|. \quad (37)$$

С другой стороны, согласно неравенствам (33)

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \{f_1(t, \tau, x(\tau), h(\tau)) - f_1(t, \tau, y(\tau), g(\tau)) + \int_t^T [f_2(\tau, s, x(s), h(s)) - f_2(\tau, s, y(s), g(s))] ds\} d\tau \right| \leq \\ & \leq \lambda \left( \int_0^t \{|x(\tau) - y(\tau)| + |h(\tau) - g(\tau)| + \int_t^T (|x(s) - y(s)| + |h(s) - g(s)|) ds\} d\tau \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Тогда, если

$$x^*(t) = X(t)c + \int_0^t [f_1(t, \tau, x(\tau), h(\tau)) + \int_t^T f_2(\tau, s, x(s), h(s)) ds] d\tau$$

и

$$y^*(t) = X(t)c + \int_0^t [f_1(t, \tau, y(\tau), g(\tau)) + \int_t^T f_2(\tau, s, y(s), g(s)) ds] d\tau,$$

то из неравенств (35), (36) и (38) следует, что

$$\|x^* - y^*\| \leq 2\lambda(T+1)T \|\varphi - \psi\|. \quad (39)$$

Но согласно неравенству треугольника

$$\|\varphi^* - \psi^*\| \leq \|x^* - y^*\| + \|h^* - g^*\|.$$

Поэтому в силу неравенств (37) и (39)

$$\|\varphi^* - \psi^*\| \leq 2\lambda(T+2)T \|\varphi - \psi\|.$$

Таким образом, если

$$2\lambda(T+2)T < 1, \quad (40)$$

то, полагая

$$k = 2\lambda(T+2)T,$$

видим, что при выполнении условия (40) выполнены также условия (31) и (32). Сказанное означает, что существует такое положительное число  $T$ , что выполняются условия (30) и (40). Последнее обеспечивает выполнение требований (31) и (32), предъявляемых к оператору  $F$  (см. (29)). Поэтому будем считать число  $\mathfrak{T}$  наименьшим из чисел  $\mathfrak{T}_M$  или  $\mathfrak{T}_\lambda$ , где  $\mathfrak{T}_M$  – положительный корень уравнения

$$M(\mathfrak{T}+1)\mathfrak{T} = \frac{a}{2},$$

а  $\mathfrak{T}_\lambda$  – положительный корень уравнения

$$2\lambda(\mathfrak{T}+2)\mathfrak{T} = 1$$

соответственно. Тогда для всех  $T \in (0, \mathfrak{T})$  выполнены неравенства (28) и (40).

Для всех  $t \in [0, T]$  и  $N = 0, 1, \dots$  положим

$$\varphi_N(t) = (x_N(t), h_N(t))$$

и построим последовательность функций

$$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N, \dots, \quad (41)$$

определенных и непрерывных на отрезке  $[0, T]$ , в силу системы (21), (22) приняв

$$\varphi_{N+1} = F\varphi_N, \quad N = 0, 1, \dots, \quad (42)$$

и

$$\varphi_0(t) \equiv (c, h_0). \quad (43)$$

Поскольку функция (43) принадлежит множеству  $\Omega_T$ , то согласно равенству (42) все функции последовательности (31) также принадлежат множеству  $\Omega_T$ . Рассмотрим функциональное уравнение

$$\varphi = F\varphi. \quad (44)$$

Согласно (31) и (32) легко видеть, что  $F$  является сжимающим оператором, отображающим множество  $\Omega_T$  в себя. Поэтому уравнение (44) имеет на множестве  $\Omega_T$  решение  $\varphi^*$ , которое может быть получено по формуле

$$\varphi^*(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \varphi_N(t), \quad (45)$$

где сходимость равномерна на отрезке  $[0, T]$  (см., например, [10, с. 165]). Но

$$h_0 = Pz(T).$$

Значит в силу (43) последовательность (42) удовлетворяет начальным приближениям (11) и (12). Поэтому из равенств (6) и (45) следует существование функций  $u^*(t)$  и  $x^*(t)$ , построенных по формулам

$$u^*(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} u_N(t) \quad (46)$$

и

$$x^*(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} x_N(t), \quad (47)$$

где сходимость равномерна на отрезке  $[0, T]$ , т.е. функция  $x^*(t)$  является соответствующим  $u^*(t)$  решением уравнения (14) с начальным условием (15). Более того, уравнение (9) с граничным условием (10) переходит в уравнение (14) с граничным условием (15), а закон управления (6) – в (10). При этом

$$J(u^*) = \lim_{N \rightarrow +\infty} J_N(u_N) \quad (48)$$

и

$$J_N(u_N) \leq J_N(u)$$

для всех функций  $u$ , суммируемых с квадратом на  $[0, T]$ . Отсюда следует, что для каждой такой функции

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} J_N(u_N) = J(u^*) \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} J_N(u),$$

т.е.  $u^*(t)$  – оптимальное управление в задаче (1)–(3).

Таким образом, теорема 1 доказана.

Замечание 2. Легко видеть, что метод последовательных приближений (6)–(12) может быть использован для отыскания решения задачи (1)–(3) для всех достаточно малых значений  $T$ .

#### 4. Общий случай

Как видно из доказательства теоремы 1, оценка (40) является весьма грубой и не накладывает принципиальных ограничений на использование метода (6)–(12) при произвольном  $T$ .

Переходя к рассмотрению общего случая задачи (1)–(3) с произвольным конечным горизонтом, заметим, что справедлива

**Теорема 2.** *Предположим, что последовательность (41), сгенерированная методом (6)–(12), равномерно ограничена. Тогда множество*

$$\Omega(\varphi_0) = \bigcap_{N \geq 0} \overline{\bigcup_{k \geq N} \varphi_k}$$

*непусто, компактно в топологии равномерной сходимости и инвариантно. При этом имеет место равенство*

$$\Omega(\varphi_0) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \varphi_N. \quad (49)$$

**Доказательство.** Поскольку множество (41) равномерно ограничено, то непустота множества  $\Omega(\varphi_0)$  очевидна. При этом в силу равенств (5), (6) и (9) несложно заметить, что функции семейства

$$\dot{\varphi}_0, \dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_N, \dots \quad (50)$$

непрерывны на отрезке  $[0, T]$ , а само семейство (50) еще и равномерно ограничено. Следовательно, множество (41) равномерно непрерывно (см., например, [11, с. 325]). Сказанное означает, что множество (41) относительно компактно в топологии равномерной сходимости (см., например, [12, с. 489]). Отсюда вытекают компактность множества  $\Omega(\varphi_0)$  в топологии равномерной сходимости, его инвариантность и равенство (49) (см. [13, с. 101–103]).

Таким образом, теорема 2 доказана.

**Следствие.** *Предположим, что в условиях теоремы 2 множество  $\Omega(\varphi_0)$  состоит из единственной функции  $\varphi^*$ . Тогда в задаче (1)–(3) существует оптимальное управление  $u^*(t)$ , удовлетворяющее равенствам (10)–(17).*

**Доказательство** следствия в силу равенства (49) фактически повторяет доказательство второй части теоремы 1 (см. (45)–(46)). Поэтому здесь оно опускается.

**Замечание 3.** Каждое компактное инвариантное множество, как известно, содержит компактное минимальное множество (см., например, [14, с. 401]). Поэтому в условиях теоремы 2 множество  $\Omega(\varphi_0)$  содержит компактное минимальное множество  $\mathfrak{M}$ .

Если  $\varphi_{\mathfrak{M}} = (x_{\mathfrak{M}}, h_{\mathfrak{M}})$  – произвольная функция множества  $\mathfrak{M}$ , то в силу теорем 1 и 2 несложно заметить, что закон управления

$$u(t) = R^{-1}B'[h_{\mathfrak{M}}(t) - K(t)x(t)] \quad (51)$$

в любом случае можно считать хорошим приближением к решению задачи (1)–(3).

Отметим также, что в силу следствия теоремы 2 сходимость метода (6)–(12) устанавливает существование решения задачи (1)–(3) и вид оптимального управления.

#### 5. Заключение

Ключевым для настоящей работы является метод последовательных приближений (6)–(12).

Согласно теореме 1 для всех достаточно малых значений  $T$  метод (6)–(12) равномерно сходится к решению задачи (1)–(3). При этом сходимость метода устанавливает существование решения задачи (1)–(3) для малых  $T$  и в пределе дает оптимальный закон управления с обратной связью.

Теорема 2 при минимальных дополнительных требованиях к методу позволяет установить близкий к оптимальному закон управления (51) для произвольного значения  $T$ . Более того, в силу следствия теоремы 2 из сходимости метода (6)–(12) всегда вытекает существование оптимального управления и его структура.

Необходимо также отметить, что ситуация выполнения условий следствия теоремы 2 не является исключительной. Последнее объясняется гарантированной сходимостью метода (6)–(12) при малых значениях  $T$  и грубостью оценки (40).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Атанас М., Фалб П. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968.
2. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. М.: Наука, 1964.
3. Lukes D.L. Optimal regulation of nonlinear systems // SIAM J. Control Optim. 1969. Vol. 7. P. 75-100.
4. Yamamoto Y. Optimal control of nonlinear systems with quadratic performance // J. Math. Anal. Appl. 1978. Vol. 64. P. 348-353.
5. Dacka C. On the controllability of a class of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1980. Vol. 25. P. 263-266.
6. Balachandran K., Somasundaram D. Existence of optimal control for nonlinear systems with quadratic performance // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. 1987. Vol. 29. P. 249-255.
7. Afanas'ev A.P., Dzyuba S.M., Lobanov S.M., Tyutyunnik A.V. Successive approximation and suboptimal control of systems with separated linear part // Appl. Comp. Math. 2003. Vol. 2. № 1. P. 48-56.
8. Afanas'ev A.P., Dzyuba S.M., Lobanov S.M., Tyutyunnik A.V. On a suboptimal control of nonlinear systems via quadratic criteria // Appl. Comp. Math. 2004. Vol. 3. № 2. P. 158-169.
9. Афанасьев А.П., Дзюба С.М. Об оптимальном управлении нелинейными системами по квадратичному критерию // Тр. ИСА РАН. 2008. Т. 32. С. 49-62.
10. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965.
11. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
12. Шварц Л. Анализ. Т. 2. М.: Мир, 1972.
13. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
14. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантами РФФИ 13-07-00077 и 15-01-08838.

Поступила в редакцию 15 мая 2015 г.

Afanas'ev A.P., Dzyuba S.M., Emelyanova I.I. OPTIMAL CONTROL WITH FEEDBACK OF SOME CLASS OF NONLINEAR SYSTEMS VIA QUADRATIC CRITERION

We present a method for synthesis of optimal control with feedback of some class of nonlinear systems via quadratic criteria. This method is based on a special method of successive approximations, whose convergence allows to prove an existence of optimal control and to get the procedure of its construction

*Key words:* method successive approximations; local optimal control of nonlinear systems via quadratic criteria; suboptimal control for arbitrary finite horizon.

Афанасьев Александр Петрович, Институт проблем передачи информации РАН им. А.А. Харкевича, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, заведующий центром распределенных вычислений, e-mail: apa@isa.ru

Afanas'ev Aleksandr Petrovich, Institute for Information Transmission Problems, Moscow, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, the Head of the Center for Distributed Computing, e-mail: apa@isa.ru

Дзюба Сергей Михайлович, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем, e-mail: sdzyuba@mail.ru

Dzyuba Sergei Mikhailovich, Tver State Technical University, Tver, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems Department, e-mail: sdzyuba@mail.ru

Емельянова Ирина Игоревна, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры информационных систем, e-mail: emelyanova-123@yandex.ru

Emelyanova Irina Igorevna, Tver State Technical University, Tver, the Russian Federation, Senior Lecturer of the Information Systems Department, e-mail: emelyanova-123@yandex.ru

УДК 517.958

## О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

© И.Б. Бадриев, В.В. Бандеров, Г.З. Гарипова, М.В. Макаров

*Ключевые слова:* трехслойная пластина; седловая точка; трансверсально-мягкий заполнитель; теорема существования.

Рассмотрена одномерная геометрически линейная задача об определении напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем при наличии ограничений на уровень формирующихся в заполнителе поперечных касательных напряжений. Обобщенная постановка сформулирована в виде задачи об отыскании седловой точки некоторого функционала. Доказана теорема существования седловой точки.

Трехслойные панели с тонкими прочными композитными обшивками и легким заполнителем благодаря своим уникальным свойствам широко используются во многих отраслях техники. Главной особенностью таких конструкций является сочетание высокой изгибной жесткости и прочности с небольшой массой и хорошей способностью поглощать энергию при ударных воздействиях. Кроме того, трехслойные конструкции позволяют обеспечить хорошие звуко- и теплоизолирующие свойства [1], а также обладают высокой технологичностью и вибростойкостью. Это и определяет их широкое применение в аэрокосмической технике, судостроении, транспортном машиностроении, а также в строительстве.

В настоящей работе рассматривается физически нелинейная и геометрически линейная задача о равновесии трехслойной пластины, составленной из двух несущих слоев и расположенным между ними трансверсально-мягким заполнителем, связанным с несущими слоями клеевым соединением. Для описания напряженно-деформированного состояния в несущих слоях используются уравнения линейной модели Кирхгофа–Лява, в заполнителе — уравнения теории упругости, упрощенные в рамках принятой модели трансверсально-мягкого слоя и проинтегрированных по толщине с удовлетворением условий сопряжения слоев по перемещениям в поперечном направлении. Кроме того, задача рассматривается при ограничении, соответствующем идеальной упруго-пластической модели для заполнителя. Обобщенная постановка задачи формулируется в виде задачи об отыскании седловой точки некоторого функционала. Отметим, что в работах [2–6] рассматривались задачи теории мягких оболочек, а также методы их решения. В [7] предлагается приближенный метод нахождения