Physics and Mathematics, chief researcher; Ural Federal University named after the First President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, the Russian Federation, Professor, e-mail: chentsov@imm.uran.ru

УДК 519.6

ЗАДАЧА МАРШРУТИЗАЦИИ, В КОТОРОЙ ФУНКЦИИ СТОИМОСТИ И «ТЕКУЩИЕ» ОГРАНИЧЕНИЯ ЗАВИСЯТ ОТ СПИСКА ЗАДАНИЙ

© А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов

Ключевые слова: маршрут; мегаполис; условия предшествования.

Рассматривается «аддитивная» задача последовательного обхода мегаполисов в условиях, когда и функции стоимости, и «текущие» ограничения зависят от списка невыполненных или, напротив, уже выполненных заданий. Упомянутые особенности возникают при исследовании таких инженерных задач как задача о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации, и задача об управлении инструментом при листовой резке деталей на машинах с числовым программным управлением (ЧПУ). В статье излагается алгоритмический вариант процедуры на основе динамического программирования, доведённый до реализации на ПЭВМ.

1. Сводка общих обозначений

Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Сопоставляем всякому множеству H семейство $\mathcal{P}(H)$ всех подмножеств (п/м) H и семейство $\mathcal{P}'(H) \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}(H) \setminus \{\emptyset\}$ ($\stackrel{\triangle}{=}$ — равенство по определению, $\emptyset$ — пустое множество) всех непустых множеств из $\mathcal{P}(H)$; $\mathrm{Fin}(H)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$. Всякой упорядоченной паре (УП) z сопоставляем её первый элемент $\mathrm{pr}_1(z)$ и второй элемент $\mathrm{pr}_2(z)$, однозначно определяемые условием $z = \big(\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)\big)$. Если a, b и c — объекты, то $(a, b, c) \stackrel{\triangle}{=} \big((a, b), c\big)$ (триплет есть УП специального вида). Для всяких трёх множеств A, B и C, как обычно, $A \times B \times C \stackrel{\triangle}{=} (A \times B) \times C$. Полагаем $\mathbb{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1; 2; \ldots\}$ и $\mathbb{N}_o \stackrel{\triangle}{=} \{0\} \cup \mathbb{N}$,

$$\overline{p, q} \stackrel{\triangle}{=} \{i \in \mathbb{N}_o |\, (p \leqslant i) \,\&\, (i \leqslant q)\} \quad \forall p \in \mathbb{N}_o \quad \forall q \in \mathbb{N}_o;$$

через $\mathcal{R}_+[T]$ обозначаем множество всех (вещественнозначных) функций, действующих из непустого множества T в $[0, \infty[\stackrel{\triangle}{=} \{\xi \in \mathbb{R} |\, 0 \leqslant \xi\}$ ($\mathbb{R}$ — вещественная прямая).

Непустому конечному множеству K сопоставляем его мощность $|K| \in \mathbb{N}$ и (непустое) множество $(\mathrm{bi})[K]$ всех биекций множества $\overline{1, |K|}$ на K; пусть $|\emptyset| \stackrel{\triangle}{=} 0$.

2. Постановка задачи

Фиксируем непустое множество X, $x^o \in X$, число $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$, а также $M_1 \in \mathrm{Fin}(X), \ldots, M_N \in \mathrm{Fin}(X)$ — мегаполисы, подлежащие посещению из x^o. Пусть

$$(x^o \notin M_j \quad \forall j \in \overline{1, N}) \,\&\, (M_p \cap M_q = \emptyset \quad \forall p \in \overline{1, N} \quad \forall q \in \overline{1, N} \setminus \{p\}).$$

Фиксируем также отношения $\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \ldots, \mathbb{M}_N \in \mathcal{P}'(M_N \times M_N)$. Полагаем, что (при $j \in \overline{1,N}$) УП $z \in \mathbb{M}_j$ определяют возможные варианты выполнения работ, связанных с посещением M_j. Итак, рассматриваем процессы вида

$$x^o \to z_1 \in \mathbb{M}_{\alpha(1)} \to \ldots \to z_N \in \mathbb{M}_{\alpha(N)}; \tag{1}$$

здесь $\alpha \in \mathbb{P}$, где $\mathbb{P} \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$, Выбор α может быть стеснён дополнительными ограничениями в виде условий предшествования. Если $j \in \overline{1,N}$, то $\mathfrak{M}_j \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_1(z) : z \in \mathbb{M}_j\} \in \mathcal{P}'(M_j)$ и $\mathbf{M}_j \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}_j\} \in \mathcal{P}'(M_j)$. Тогда

$$\mathbb{X} \stackrel{\triangle}{=} \{x^o\} \cup \Bigl(\bigcup_{i=1}^{N} M_i\Bigr) \in \mathrm{Fin}(X), \quad \mathbf{X} \stackrel{\triangle}{=} \{x^o\} \cup \Bigl(\bigcup_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i\Bigr) \in \mathrm{Fin}(\mathbb{X}).$$

Пусть $\mathfrak{N} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}'(\overline{1,N})$, $A_1 : \mathbf{X} \times \mathfrak{N} \to \mathcal{P}'(M_1), \ldots, A_N : \mathbf{X} \times \mathfrak{N} \to \mathcal{P}'(M_N)$. При $j \in \overline{1,N}, x \in \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ множество $A_j(x,K)$ исчерпывает возможности очередного перемещения из x в M_j в условиях, когда K — список ещё не выполненных заданий. Полагаем далее, что $A_j(x,K) \cap \mathfrak{M}_j \neq \emptyset \ \ \forall x \in \mathbf{X} \ \ \forall K \in \mathfrak{N} \ \ \forall j \in K$. В этой связи отметим, что при $x \in \mathbf{X}, K \in \mathfrak{N}$ и $j \in K$

$$\mathbb{A}_j(x,K) \stackrel{\triangle}{=} \{z \in \mathbb{M}_j |\, \mathrm{pr}_1(z) \in A_j(x,K)\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{M}_j).$$

Полагая, что $\mathbb{Z}$ — множество всех отображений (кортежей) из $\overline{0,N}$ в $\mathbb{X} \times \mathbf{X}$, введём при $\alpha \in \mathbb{P}$ множество

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_\alpha \stackrel{\triangle}{=} \bigl\{(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathbb{Z} |\, \bigl(z_o = (x^o, x^o)\bigr) \,\&\, \bigl(z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \ \ \forall t \in \overline{1,N}\bigr) \,\& \\ \&\, \bigl(\mathrm{pr}_1(z_s) \in A_{\alpha(s)}\bigl(\mathrm{pr}_2(z_{s-1}), \{\alpha(t) : t \in \overline{s,N}\}\bigr) \ \ \forall s \in \overline{1,N}\bigr)\bigr\} \end{aligned} \tag{2}$$

всех возможных траекторий (трасс), согласованных с α (имеются в виду процессы типа (1), осложнённые условиями на перемещения, связанными с $A_1, \ldots, A_N$). Множества (2) являются непустыми и конечными.

Фиксируем множество $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N})$, для которого $\forall \mathbf{K}_o \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \ \exists z_o \in \mathbf{K}_o$: $\mathrm{pr}_1(z_o) \neq \mathrm{pr}_2(z) \ \ \forall z \in \mathbf{K}_o$. Тогда [1, ч. 2]

$$\mathbf{A} \stackrel{\triangle}{=} \{\alpha \in \mathbb{P} |\, \alpha^{-1}\bigl(\mathrm{pr}_1(z)\bigr) < \alpha^{-1}\bigl(\mathrm{pr}_2(z)\bigr) \ \ \forall z \in \mathbf{K}\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P})$$

определяет множество всех маршрутов (перестановок $\overline{1,N}$), $\mathbf{K}$-допустимых по предшествованию, а $\mathbf{D} \stackrel{\triangle}{=} \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{A} \times \mathbb{Z} |\, \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{A} \times \mathbb{Z})$ — множество всех допустимых решений (ДР) формулируемой ниже экстремальной задачи.

Фиксируем $\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}]$, $c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbf{X} \times \mathfrak{N}], \ldots, c_N \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbf{X} \times \mathfrak{N}]$ и $f \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}]$. Функция $\mathbf{c}$ используется для оценивания внешних перемещений, функции $c_1, \ldots, c_N$ — для оценивания (внутренних) работ, связанных с посещением мегаполисов, а функция f — для оценивания терминального состояния. Если $\alpha \in \mathbf{A}$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha$, то

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \stackrel{\triangle}{=} \sum_{t=1}^{N} \bigl[\mathbf{c}\bigl(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \{\alpha(s) : s \in \overline{t,N}\}\bigr) + \\ + c_{\alpha(t)}\bigl(z_t, \{\alpha(s) : s \in \overline{t,N}\}\bigr)\bigr] + f\bigl(\mathrm{pr}_2(z_N)\bigr) \in [0, \infty[. \end{aligned} \tag{3}$$

В качестве основной рассматриваем следующую задачу:

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \longrightarrow \min, \ \alpha \in \mathbf{A}, \ (z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha, \tag{4}$$

обладающую непустым конечным множеством оптимальных решений.

3. Алгоритм на функциональном уровне

Для решения задачи (4) применяем вариант ДП, соответствующий идейно [1, § 4.9], а также [2, 3]. Введём в рассмотрение оператор $\mathbf{I}$ [1, (2.2.27), (2.2.28)], действующий в $\mathfrak{N}$ (см. [1, (2.2.1)]), а также семейство $\mathcal{G}$ [1, (4.9.1)], множества которого ранжируем по мощности, конструируя $\mathcal{G}_s \overset{\triangle}{=} \{K \in \mathcal{G} | \, s = |K|\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}) \quad \forall s \in \overline{1,N}$. Ясно, что $\mathcal{G}_N = \{\overline{1,N}\}$ (синглетон) и $\mathcal{G}_1 = \big\{\{t\} : t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1\big\}$, где $\mathbf{K}_1 \overset{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$. Если $j \in \overline{2,N}$, то $\mathcal{G}_{j-1} = \big\{K \setminus \{k\} : K \in \mathcal{G}_j, k \in \mathbf{I}(K)\big\}$, где отображение $\mathbf{I}$, действующее в $\mathfrak{N}$, соответствует [1, (2.2.28)]. Тем самым определена рекуррентная процедура

$$\mathcal{G}_N \to \mathcal{G}_{N-1} \to \ldots \to \mathcal{G}_1$$

построения семейств существенных списков.

Следующий этап — построение слоёв пространства позиций $D_o, , D_1, \ldots, D_N$, где

$$D_o \overset{\triangle}{=} \Big\{(x, \emptyset) : x \in \bigcup_{i \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1} \mathbf{M}_i\Big\};$$

так же просто определяется $D_N : D_N = \{(x^o, \overline{1,N})\}$ (синглетон, содержащий УП $(x^o, \overline{1,N})$). Если же $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$, то последовательно определяются множества

$$\mathcal{J}_s(K) \overset{\triangle}{=} \big\{j \in \overline{1,N} \setminus K | \, \{j\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}\big\},$$

$$\mathcal{M}_s[K] \overset{\triangle}{=} \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s(K)} \mathbf{M}_j, \quad \mathbb{D}_s[K] \overset{\triangle}{=} \{(x, K) : x \in \mathcal{M}_s[K]\}.$$

Тогда «промежуточные» слои определяются следующим образом:

$$D_s \overset{\triangle}{=} \bigcup_{K \in \mathcal{G}_s} \mathbb{D}_s[K] \quad \forall s \in \overline{1, N-1}.$$

Каждый из слоёв $D_o, D_1, \ldots, D_N$ — непустое п/м $\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1,N})$. На каждом таком множестве определяется вещественнозначная функция; для этого используется рекуррентная процедура, опирающаяся на легкопроверяемое свойство

$$\big(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}\big) \in D_{s-1} \quad \forall s \in \overline{1,N} \quad \forall (x, K) \in D_s \quad \forall j \in \mathbf{I}(K) \quad \forall z \in \mathbb{A}_j(x, K). \tag{5}$$

Требуемая конкретная рекуррентная процедура конструирования функций

$$v_o \in \mathcal{R}_+[D_o], v_1 \in \mathcal{R}_+[D_1], \ldots, v_N \in \mathcal{R}_+[D_N] \tag{6}$$

имеет следующий вид: v_o определяется выражением

$$v_o(x, \emptyset) \overset{\triangle}{=} f(x) \quad \forall x \in \bigcup_{i \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1} \mathbf{M}_i;$$

если же $s \in \overline{1,N}$, то преобразование v_{s-1} в v_s с учётом (5) определяется выражением

$$v_s(x, K) \overset{\triangle}{=} \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x,K)} \big[\mathbf{c}\big(x, \mathrm{pr}_1(z), K\big) + c_j(z, K) + v_{s-1}\big(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}\big)\big] \quad \forall (x, K) \in D_s. \tag{7}$$

После выполнения N этапов, характеризуемых посредством (7), все функции (6) будут найдены и, в частности, будет определено значение $V \triangleq v_N(x^o, \overline{1,N})$, что вполне соответствует определению D_N. Более того, можно показать, что V является глобальным экстремумом задачи (4):

$$V = \min_{\alpha \in \mathbf{A}} \min_{(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha} \mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}]. \tag{8}$$

Построение оптимального решения на основе $(v_1, \ldots, v_n)$. Полагаем $\mathbf{z}^{(o)} \triangleq (x^o, x^o)$; с учётом (7), (8) выбираем $\eta_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $\mathbf{z}^{(1)} \in \mathbb{A}_{\eta_1}(x^o, \overline{1,N})$ так, что

$$V = \mathbf{c}\big(x^o, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N}\big) + c_{\eta_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1,N}) + v_{N-1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}\big). \tag{9}$$

Тогда (см. (5)) $\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}\big) \in D_{N-1}$. С учётом (7) выбираем $\eta_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\eta_1\})$ и $\mathbf{z}^{(2)} \in \mathbb{A}_{\eta_2}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}\big)$ так, что

$$\begin{aligned} v_{N-1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}\big) &= \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}\big) + \\ &+ c_{\eta_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{N-2}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}\big), \end{aligned} \tag{10}$$

где согласно (5) $\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}\big) \in D_{N-2}$. Из (9), (10) вытекает, что

$$\begin{aligned} V = {} & \mathbf{c}\big(x^o, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N}\big) + \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}\big) + \\ & + c_{\eta_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1,N}) + c_{\eta_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{N-2}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}\big). \end{aligned} \tag{11}$$

Далее процедуру выбора, подобную (9), (10) следует продолжать вплоть до исчерпывания полного списка $\overline{1,N}$. После исполнения N шагов, подобных (9), (10), будут построены маршрут $\eta \triangleq (\eta_j)_{j\in\overline{1,N}} \in \mathbf{A}$ и трасса $(\mathbf{z}^{(j)})_{j\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\eta$ такие, что ДР $\big(\eta, (\mathbf{z}^{(j)})_{j\in\overline{0,N}}\big) \in \mathbf{D}$ оптимально в задаче (4) (при $N = 2$ упомянутая оптимальность следует из (11)).

4. Вычислительная реализация

Одна из конкретных постановок, вкладывающаяся в вышеупомянутую общую схему, связана с маршрутизацией движения инструмента при листовой резке на машинах с ЧПУ. Имеется в виду резка плоских деталей, граница которых разбивается всякий раз в сумму замкнутых кривых, именуемых ниже контурами; при этом резке каждого внешнего контура должна предшествовать резка внутренних. Резка осуществляется по эквидистантам, то есть с «запасом».

Мегаполисы образуются посредством дискретизации вторичных эквидистант, близких по отношению к эквидистантам, по которым осуществляется резка: при данной дискретизации намечаются пары точек «в составе» точки врезки и точки выключения инструмента. Зависимость от списка заданий возникает по следующей причине: новые точки врезки должны выбираться на достаточном расстоянии от «пустот», образовавшихся за счёт уже вырезанных деталей (соображение, связанное с жесткостью листа). Здесь в явном виде присутствует зависимость от списка $\widetilde{K}$ уже выполненных заданий, который, однако, имеет вид $\widetilde{K} = \overline{1,N} \setminus K$, где K — список оставшихся заданий, связанных всякий раз с резкой по эквидистанте контура (в данном случае N — общее число контуров). В итоге реализуется возможность сведения к постановке, рассматриваемой в предыдущих разделах. Данный вариант задачи был смоделирован на ПЭВМ; построенные алгоритм и программа позволяет решать задачи, где $N \approx 31$, $|\mathbf{K}| \approx 20$ (при этом функции стоимости предполагались независящими от списка заданий, что соответствует исходной содержательной задаче; в отношении же «текущих» ограничений вышеупомянутая зависимость сохранена).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ченцов А.Г.* Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 238 с.

2. *Ченцов А.Г.* К вопросу о маршрутизации комплекса работ // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2013. Вып. 1. С. 59–82.

3. *Ченцов А.Г., Ченцов А.А.* Динамическое программирование в задаче маршрутизации с ограничениями и стоимостями, зависящими от списка заданий // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 1. С. 20–23.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 13-01-00304, № 15-01-07909, № 14-08-00419).

Поступила в редакцию 19 мая 2015 г.

Chentsov A.A., Chentsov A.G. ROUTE PROBLEM IN WHICH COST FUNCTIONS AND «CURRENT» CONSTRAINTS DEPEND FROM TASKS LIST

Under conditions when both cost functions and «current» constraints depend from tasks list, the «additive» problem of the sequential circuit of megalopolises is considered (it is possible that tasks are not fulfilled or conversely already fulfilled). The above-mentioned singularities arise under investigation of the following engineering problems: the problem about dismantling of energy block of atomic electric station revealed from exploitation and the problem of the control under leaf cutting of details on machines with numerical programmed control (CNC). In article, algorithmic variant of the dynamic programming procedure is presented; this variant was realized on PC.

Key words: route; megalopolis; preceding condition.

Ченцов Александр Георгиевич, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник; Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, профессор, e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Chentsov Alexandr Georgiyevich, Institute for Mathematics and Mechanics named after N.N. Krasovskii of UB RAS, Ekaterinburg, the Russian Federation, Corresponding Member of RAS, Doctor of Physics and Mathematics, chief researcher; Ural Federal University named after the First President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, the Russian Federation, Professor, e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Ченцов Алексей Александрович, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН. г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, e-mail: chentsov@binsys.ru

Chentsov Alexey Aleksandrovich, Institute for Mathematics and Mechanics named after N.N. Krasovskii of UB RAS, Ekaterinburg, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, e-mail: chentsov@binsys.ru