20. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 13-01-96050 р_урал_а).

Поступила в редакцию 1 июня 2015 г.

Mulyukov M.V. THE STABILITY OF THE LINEAR AUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATION WITH DISTRIBUTED AND CONCENTRATED DELAY

A linear autonomous differential equation with distributed and concentrated delay is considered. Effective sharp criteria of the asymptotic and uniform stability are obtained. The criteria are represented graphically.

Key words: delay differential equations; asymptotic stability; uniform stability; effective criteria.

Мулюков Михаил Вадимович, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, аспирант кафедры вычислительной математики и механики, e-mail: Mulykoff@gmail.com

Mulyukov Mikhail Vadimovich, Perm State National Research University, Perm, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Computational Mathematics and Mechanics Department, e-mail: Mulykoff@gmail.com

УДК 517.958

ОБ УБЫВАНИИ ПРИ БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ КАВАХАРЫ

© М.А. Опритова, А.В. Фаминский

Ключевые слова: уравнение Кавахары; начально-краевая задача; убывание решений при больших временах.

Рассматривается начально-краевая задача на полуоси для обобщенного уравнения Кавахары, содержащего абсорбирующее слагаемое, которое может вырождаться на конечном отрезке. Устанавливается результат об убывании при больших временах слабых решений.

В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача для обобщённого уравнения Кавахары

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + uu_x + g(x)u = 0 \tag{1}$$

(a и b – вещественные константы) при $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ с граничными условиями

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \qquad u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=0} = 0. \tag{2}$$

Уравнение Кавахары

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + uu_x = 0 \tag{3}$$

было выведено в 1972 г. в работе [1] для описания распространения длинных нелинейных волн в средах со слабой дисперсией и является модификацией уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t + u_{xxx} + au_x + uu_x = 0 \tag{4}$$

на случай дисперсионного соотношения более высокого порядка. Слагаемое $g(x)u$ с физической точки зрения означает наличие абсорбции в моделируемом процессе.

В работе изучается поведение слабых решений задачи (1), (2) при больших временах.

Заметим, что для решений задачи Коши для уравнения (3) справедлив закон сохранения в $L_2(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u_0^2\,dx, \tag{5}$$

что исключает возможность их убывания по этой норме. Аналогичный закон сохранения справедлив и для уравнения Кортевега–де Фриза (4). В случае рассматриваемой начально-краевой задачи равенство (5) заменяется следующим:

$$\int_{\mathbb{R}_+} u^2(t,x)\,dx + \int_0^t u_{xx}^2(\tau,0)\,d\tau = \int_{\mathbb{R}_+} u_0^2\,dx. \tag{6}$$

Конечно, наличие 2-го слагаемого в левой части равенства (6) не позволяет утверждать, что убывание решений в норме $L_2(\mathbb{R}_+)$ невозможно, однако положительный результат также неизвестен, так что вопрос о возможности убывания решений задачи (3), (2) в данной норме при $t \to +\infty$ остаётся открытым.

Заметим, что это вопрос остаётся открытым и в случае аналогичной задачи для уравнения (4) при краевом условии $u|_{x=0} = 0$ (во 2-ом слагаемом вместо u_{xx} следует тогда записать u_x). Чтобы построить убывающие при $t \to +\infty$ решения в статье [2] в уравнение (4) было введено дополнительное абсорбирующее слагаемое $g(x)u$, где функция g предполагалась неотрицательной и строго положительной в окрестности нуля и бесконечности. В дальнейшем в работе [3] было замечено, что последнее условие в окрестностм нуля можно снять. В случае задачи Коши для аналогичного обобщённого уравнения Кортевега–де Фриза такой же результат был установлен в работе [4].

В настоящей работе результат аналогичный [2] получен для задачи (1), (2). Чтобы его сформулировать, введём некоторые обозначения.

Для любого $T>0$ положим $\Pi_T^+ = (0,T)\times\mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$.

Для $p\in[1,+\infty]$ положим $L_{p,+} = L_p(\mathbb{R}_+)$, $W_{p,+}^k = W_p^k(\mathbb{R}_+)$. $H_+^k = W_{2,+}^k = H^k(\mathbb{R}_+)$, $C_{b,+}^k = C_b^k(\overline{\mathbb{R}}_+)$ – пространство непрерывных ограниченных на $\overline{\mathbb{R}}_+$ функций, обладающих на $\overline{\mathbb{R}}_+$ непрерывными ограниченными производными до порядка k включительно.

Определим специальное весовое пространство. Для $\alpha\in\mathbb{R}$ положим

$$L_{2,+}^{\alpha} = \{f(x) : (1+x)^{\alpha} f \in L_{2,+}\}$$

и введём на нем естественную норму. Положим

$$\lambda^+(f;T) = \sup_{m\geqslant 0} \int_0^T \int_m^{m+1} f^2(t,x)\,dxdt.$$

Для $\alpha\geqslant 0$ введём пространство $X^{\alpha}(\Pi_T^+)$, состоящее из функций $f(t,x)$ таких, что

$$f \in C_w([0,T]; L_{2,+}^{\alpha}), \quad \lambda^+(f_{xx};T) < +\infty$$

и, если $\alpha>0$, то дополнительно

$$f_{xx} \in L_2(0,T; L_{2,+}^{\alpha-1/2})$$

(символ C_w обозначает пространство слабых отображений) с естественной нормой.

Дадим определение слабого решения рассматриваемой задачи.

О п р е д е л е н и е 1. Функция $u(t,x)$ из пространства $L_\infty(0,T;L_{2,+})$ называется слабым решением задачи (1), (2), если для любой функции $\phi(t,x)$ такой, что $\phi \in L_2(0,T;H^5_+)$, $\phi_t \in L_2(0,T;L_{2,+})$, $\phi|_{t=T}=0$, $\phi|_{x=0}=\phi_x|_{x=0}=\phi_{xx}|_{x=0}=0$, выполняется интегральное тождество

$$\iint_{\Pi_T^+}\Big[u\big(\phi_t-\partial_x^5\phi+b\partial_x^3\phi+a\phi_x-g\phi\big)+\frac{1}{2}u^2\phi_x\Big]\,dxdt+\int_{\mathbb{R}_+}u_0(x)\phi(0,x)\,dx=0. \qquad (7)$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Пусть $u_0 \in L_{2,+}$, $g \in L_{\infty,+}$. Предположим также, что*

$$g(x) \geqslant 0 \qquad \forall x>0 \qquad (8)$$

и существуют $R>0$, $\alpha_0>0$ такие, что

$$g(x) \geqslant \alpha_0 \qquad \forall x>R. \qquad (9)$$

Тогда существуют положительные константы c и c_0, зависящие от $\|u_0\|_{L_{2,+}}$ и $\|g\|_{L_{\infty,+}}$, такие что существует слабое решение задачи (1), (2) $u \in X^0(\Pi_T^+)$ $\forall T>0$, для которого справедливо неравенство

$$\|u(t,\cdot)\|_{L_{2,+}} \leqslant ce^{-c_0 t} \qquad \forall t \geqslant 0. \qquad (10)$$

З а м е ч а н и е 1. Если $u_0 \in L^{\alpha}_{2,+}$ для некоторого $\alpha \geqslant 0$, $g \in L_{\infty,+}$, то существование слабого решения задачи (1), (2) в пространстве $X^{\alpha}(\Pi_T^+)$ для любого $T>0$ и его единственность при $\alpha \geqslant 3/8$ доказаны в работе [5].

З а м е ч а н и е 2. В статье [6] аналогичный результат получен для более общего, чем (1) уравнения, а именно,

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + uu_x + g_1(t,x)u_x + g(t,x)u = 0,$$

но при более сильных предположениях гладкости функции g: равномерно по t эта функция должна принадлежать пространству $W^2_{\infty,+}$.

В случае интегрирования по полуоси $\mathbb{R}_+$ пределы интегрирования будем опускать.

Основным утверждением, используемым для доказательства Теоремы 1, является следующая лемма.

Л е м м а 1. *Пусть $u_0 \in L^{1/2}_{2,+}$, $g \in L_{\infty,+}$ и выполнены условия (8), (9). Тогда для любого $T>0$ для слабого решения задачи (1), (2) $u \in X^{1/2}(\Pi_T^+)$ справедливо неравенство*

$$\int_0^T\!\!\int_0^R u^2\,dxdt \leqslant 2c\iint_{\Pi_T^+} gu^2\,dxdt + c\int_0^T u_{xx}^2\big|_{x=0}\,dt, \qquad (11)$$

где константа c зависит от $\|u_0\|_{L_{2,+}}$ и $\|g\|_{L_{\infty,+}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что из результатов статьи [6] следует, что след $u_{xx}|_{x=0}$ существует.

Предположим, что неравенство (11) не имеет места. Тогда существуют последовательность начальных функций $\{u_{0k} \in L^{1/2}_{2,+}\}_{k\in\mathbb{N}}$, ограниченная в $L_{2,+}$, и последовательность функций $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (для которых выполнены условия (8) и (9)), ограниченная в $L_{\infty,+}$, для которых соответствующие слабые решения задачи типа (1), (2) $u_k(t,x)\in X^{1/2}(\Pi_T^+)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{2\iint_{\Pi_T^+} g_k u_k^2\,dxdt+\int_0^T u_{kxx}^2\big|_{x=0}\,dt}{\int_0^T\!\int_0^R u_k^2\,dxdt}=0. \tag{12}$$

Положим

$$p_k=\|u_k\|_{L_2\left((0,T)\times(0,R)\right)},\quad v_k(t,x)\equiv\frac{u_k(t,x)}{p_k},\quad v_{0k}(x)\equiv\frac{u_{0k}(x)}{p_k}.$$

Тогда

$$\|v_k\|_{L_2\left((0,T)\times(0,R)\right)}=1\qquad \forall k\in\mathbb{N} \tag{13}$$

и функция v_k является слабым решением следующей задачи:

$$v_t-v_{xxxxx}+bv_{xxx}+av_x+p_k v v_x+g_k v=0,\qquad v\big|_{t=0}=v_{0k}. \tag{14}$$

Заметим, что поскольку $u_k\in X^{1/2}(\Pi_T^+)$, то $u_k\in L_\infty(0,T;L_{2,+})$, $u_{kxx}\in L_2(0,T;L_{2,+})$ и тогда, в частности, в силу известных теорем вложения $u_{kx}\in L_{8/3}(0,T;L_{\infty,+})$. Следовательно, $u_k u_{kx}, g_k u_k\in L_2(\Pi_T^+)$. Из результатов работы [7, Леммы 4.3, 4.4] следует, что в таком случае для функций u_k при $t\in[0,T]$ справедливо равенство аналогичное (6):

$$\int u_k^2(t,x)\,dx+\int_0^t u_{kxx}^2\big|_{x=0}\,d\tau+2\int_0^t\!\!\int g_k u_k^2\,dxd\tau=\int u_{0k}^2\,dx \tag{15}$$

(формально оно получается умножением соответствующего равенства (1) на $2u_k(t,x)$ и последующим интегрированием). В частности, из (8) и (15) следует, что функция $\|u_k(t,\cdot)\|_{L_{2,+}}$ не возрастает и

$$p_k\leqslant T^{1/2}\|u_{0k}\|_{L_{2,+}}. \tag{16}$$

Кроме того, в силу (12) при $k\to+\infty$

$$2\iint_{\Pi_T^+} g_k v_k^2\,dxdt+\int_0^T v_{kxx}^2\big|_{x=0}\,dt\to 0. \tag{17}$$

Покажем, что функции v_{0k} равномерно по k ограничены в пространстве $L_{2,+}$. Действительно, в силу условия (9)

$$\iint_{\Pi_T^+} u_k^2\,dxdt\leqslant\frac{1}{\alpha_0}\iint_{\Pi_T^+} g_k u_k^2\,dxdt+\int_0^T\!\!\int_0^R u_k^2\,dxdt$$

и тогда из равенства (15) следует, что

$$\int u_{0k}^2\,dx\leqslant\frac{1}{T}\iint_{\Pi_T^+} u_k^2\,dxdt+\int_0^T u_{kxx}^2\big|_{x=0}\,dt+2\iint_{\Pi_T^+} g_k u_k^2\,dxdt\leqslant$$
$$\leqslant\Big(2+\frac{1}{\alpha_0 T}\Big)\iint_{\Pi_T^+} g_k u_k^2\,dxdt+\int_0^T u_{kxx}^2\big|_{x=0}\,dt+\frac{1}{T}\int_0^T\!\!\int_0^R u_k^2\,dxdt$$

и, поэтому,

$$\int v_{0k}^2\,dx\leqslant\Big(2+\frac{1}{\alpha_0 T}\Big)\iint_{\Pi_T^+} g_k v_k^2\,dxdt+\int_0^T v_{kxx}^2\big|_{x=0}\,dt+\frac{1}{T}.$$

Применяя (17) находим, что

$$\|v_{0k}\|_{L_{2,+}} \leqslant c. \tag{18}$$

Тогда из (16), (18) и результатов работы [5, Теорема 1.1] следует, что равномерно по k

$$\|v_k\|_{X^0(\Pi_T^+)} \leqslant c. \tag{19}$$

В частности, из самого равенства (14) и оценки (19) следует, что равномерно по k

$$\|v_{k\,t}\|_{L_2(0,T;H^{-3}(0,r))} \leqslant c(r) \quad \forall r>0.$$

Переходя к подпоследовательностям (с сохранением обозначений) получаем, что $p_k \to p$, $g_k \to g$ $*-$слабо в $L_{\infty,+}$, $v_{0k} \to v_0$ слабо в $L_{2,+}$, $v_k \to v$ $*-$слабо в $L_\infty(0,T;L_{2,+})$, $v_k \to$ $\to v$ слабо в $L_2(0,T;H^2(0,r))$ $\forall r>0$, $v_k \to v$ сильно в $L_2(0,T;H^1(0,r))$ $\forall r>0$ при $k\to+$ $+\infty$. С другой стороны, из (17) следует, что $v_k \to 0$ в $L_2\big((0,T)\times(R,+\infty)\big)$, следовательно,

$$v_k \to v \quad \text{сильно в } L_2(\Pi_T^+), \qquad \text{где} \quad v(t,x)=0 \quad \text{для } x>R. \tag{20}$$

Пусть $\phi(t,x)$ – любая пробная функция из Определения 1. Для каждой функции v_k запишем соответствующий аналог равенства (7):

$$\iint_{\Pi_T^+} \big[v_k\big(\phi_t - \partial_x^5\phi + b\partial_x^3\phi + a\phi_x - g_k\phi\big) + \frac{p_k}{2}v_k^2\phi_x\big]\,dxdt + \int v_{0k}(x)\phi(0,x)\,dx = 0.$$

Заметим, что $\phi \in C([0,T];H_+{}^2) \subset C([0,T];C^1_{b,+})$. Тогда переходя в полученном равенстве к пределу при $k\to+\infty$ получаем с учетом (17), что

$$\iint_{\Pi_T^+} \big[v\big(\phi_t - \partial_x^5\phi + b\partial_x^3\phi + a\phi_x\big) + \frac{p}{2}v^2\phi_x\big]\,dxdt + \int v_0(x)\phi(0,x)\,dx = 0,$$

т. е. функция $v\in X^0(\Pi_T^+)$ является слабым решением задачи

$$v_t - \partial_x^5 v + b\partial_x^3 v + av_x + pvv_x = 0, \qquad v\big|_{t=0} = v_0. \tag{21}$$

Более того, в силу (20) $v\in X^\alpha(\Pi_T^+)$ для любого $\alpha>0$. Тогда из [6, Теорема 1.2] следует, что $v, v_x \in L_\infty\big((\delta,T)\times\mathbb{R}_+)\big)$, $\partial_x^m v \in L_2\big((\delta,T)\times\mathbb{R}_+)\big)$ при $m\leqslant 4$ для любого $\delta\in(0,T)$. Это означает, что для решения v уравнения (21) применимы результаты статьи [8, Теорема 1] о единственности продолжения, из которых следует, что в силу (20) $v(t,x)=0$ в Π_T^+. Следовательно, также согласно (20) $v_k\to 0$ в $L_2(\Pi_T^+)$, что противоречит равенству (13). Лемма доказана.

Теперь можно доказать Теорему 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $u_0 \in L_{2,+}^{1/2}$, тогда $u\in X^{1/2}(\Pi_T^+)$ для любого $T>0$. Запишем равенство (15) для функции u:

$$\int u^2(t,x)\,dx + \int_0^t u_{xx}^2\big|_{x=0}\,d\tau + 2\int_0^t\!\!\int gu^2\,dxd\tau = \int u_0^2\,dx. \tag{21}$$

В частности, функция $\|u(t,\cdot)\|_{L_{2,+}}$ не возрастает. Зафиксируем $T>0$, тогда

$$\int u^2(T,x)\,dx + 2\alpha_0\int_0^T\!\!\int_R^{+\infty} u^2\,dxdt \leqslant \int u_0^2\,dx$$

и, следовательно,

$$\iint_{\Pi_T^+} u^2\,dxdt \leqslant \frac{1}{2\alpha_0}\int u_0^2\,dx - \frac{1}{2\alpha_0}\int u^2(T,x)\,dx + \int_0^T\!\!\int_0^R u^2\,dxdt.$$

С помощью оценки (11) это неравенство можно переписать в виде

$$\iint_{\Pi_T^+} u^2\,dxdt \leqslant \frac{1}{2\alpha_0}\int u_0^2\,dx - \frac{1}{2\alpha_0}\int u^2(T,x)\,dx + c\Big[2\iint_{\Pi_T^+} gu^2\,dxdt + \int_0^T u_{xx}^2\big|_{x=0}\,dt\Big]. \quad (22)$$

Выражая величину в квадратных скобках в (22) с помощью равенства (21) при $t=T$ и используя невозрастание $\|u(t,\cdot)\|_{L_{2,+}}$, находим, что

$$T\int u^2(T,x)\,dx \leqslant \frac{1}{2\alpha_0}\int u_0^2\,dx - \frac{1}{2\alpha_0}\int u^2(T,x)\,dx + c\Big(\int u_0^2\,dx - \int u^2(T,x)\,dx\Big)$$

и, следовательно,

$$\Big(T+\frac{1}{2\alpha_0}+c\Big)\int u^2(T,x)\,dx \leqslant \Big(\frac{1}{2\alpha_0}+c\Big)\int u_0^2\,dx,$$

т. е.

$$\int u^2(T,x)\,dx \leqslant \gamma(\|u_0\|_{L_{2,+}}, \|g\|_{L_{\infty,+}})\int u_0^2\,dx, \quad \gamma\in(0,1),$$

откуда стандартным приемом выводим оценку (10).

В общем случае для любого $h>0$ положим $u_{0h}(x)\equiv u_0(x)$ при $x\leqslant 1/h$, $u_{0h}(x)=0$ при $x>1/h$. Тогда $u_{0h}\in L_{2,+}^{1/2}$ и $u_{0h}\to u_0$ в $L_{2,+}$ при $h\to +0$. Для соответствующих решений u_h задачи типа (1), (2) с начальной функцией u_{0h} справедлива равномерная по h оценка (10). Более того, слабое решение исходной задачи $u\in X^0(\Pi_T^+)$ $\forall T>0$ может быть получено на основе оценок из [5] как $*$-слабый предел, в частности, в пространствах $L_\infty(n,n+1;L_{2,+})$ $\forall n$ функций u_h, и тогда оценка (10) останется справедливой и в предельном случае. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kawahara T.* Oscillatory solitary waves in dispersive media // J. Phys. Soc. Japan. 1972. V. 33. № 1. P. 260–264.

2. *Linares F., Pazoto A.F.* Asymptotic behavior of the Korteweg–de Vries equation posed in a quarter plane // J. Differential Equ. 2009. V. 246. P. 1342–1353.

3. *Pazoto A.F., Rosier R.* Uniform stabilization in weighted Sobolev spaces for the KdV equation posed on the half-line // Descrete Contin. Dyn. Syst., Ser B. 2010. V. 14. P. 1511–1535.

4. *Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Faminskii A., Natali F.* Decay of solutions to damped Korteweg–de Vries equation // Appl. Math. Optim. 2012. V. 65. № 2. P. 221–251.

5. *Сангаре К., Фаминский А.В.* Слабые решения смешанной задачи в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары // Матем. заметки. 2009. Т. 85. № 1. С. 98–109.

6. *Опритова М.А., Фаминский А.В.* О начально-краевой задаче в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары // Укр. матем. вестник. 2014. Т. 11. № 3. С. 312–339.

7. *Кувшинов Р.В., Фаминский А.В.* Смешанная задача в полуполосе для уравнения Кавахары // Дифф. уравнения. 2009. Т. 45. № 3. С. 391–402.

8. *Шананин Н.А.* О частичной квазианалитичности обобщенных решений слабо нелинейных дифференциальных уравнений со взвешенными производными // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 4. С. 608–619.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена в рамках реализации государственного задания министерства образования и науки РФ в сфере научной деятельности (код проекта 1.333.2014/K).

Поступила в редакцию 11 июня 2015 г.

Opritova M.A., Faminskii A.M. ON LARGE-TIME DECAY OF SOLUTIONS TO AN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM ON A SEMI-AXIS FOR THE GENERALIZED KAWAHARA EQUATION.

An initial-boundary value problem on a semi-axis for the generalized Kawahara equation with an absorption term which can degenerate on a bounded interval is considered. A result on large-time decay of weak solutions is established.

Key words: Kawahara equation; initial-boundary value problem; large-time decay of solutions.

Опритова Мария Александровна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, аспирант кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: upi23@mail.ru

Opritova Mariya Aleksandrovna, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: upi23@mail.ru

Фаминский Андрей Вадимович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: afaminskii@sci.pfu.edu.ru

Faminskii Andrei Vadimovich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: afaminskii@sci.pfu.edu.ru

УДК 330.4, 519.86, 517.977.5

ОПТИМИЗАЦИЯ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ПОЛИТИКИ ФИРМ ИННОВАЦИОННОГО СЕКТОРА

© В.А. Остапов, Н.Н. Оленев

Ключевые слова: динамическая модель; венчурное инвестирование; оптимальное управление.

Статья посвящена исследованию процесса инвестирования в инновационные проекты. Построена динамическая модель жизненного цикла инновационных фирм на основе микроописания соответствующего инвестиционного периода. Поставлена и решена неавтономная задача оптимального управления для фирмы инновационного сектора экономики.

В статье дано построение динамической модели, являющейся упрощенным микроописанием деятельности фирм – объектов венчурного инвестирования типа стартапов или других инновационных проектов.

Основной целью исследования этой работы является изучение влияния различных форм инвестирования на прибыль венчурного капиталиста (ВК) и капитализацию фирмы, которая получает от первого инвестиции, выплачивая обратно определенную часть дохода или передавая часть капитала в его собственность.

Существенным аспектом модели является наличие мультипликатора знаний, влияющего на выпуск инновационных фирм. По своей форме он отражает процесс передачи знаний о ведении бизнеса от инвестора к мелким фирмам, что позволяет вторым успешно выходить на рынок. При этом задачей инвестора является масштабирование бизнеса, т. е. превращение мелкого стартапа в крупную корпорацию. Ниже предложена модель, описывающая жизненный цикл инновационного проекта.