Поступила в редакцию 28 мая 2015 г.

Vasilyev A.V. ON DISCRETE-DIFFERENCE EQUATIONS

One considers a general difference-discrete equation on a real line and a half-axis and describes conditions for a unique solvability for simplest class of such equations in the space L_2. This studying is based on a periodic analogue of the Riemann boundary value problem.

Key words: difference equation; discrete equation; symbol.

Васильев Александр Владимирович, Национальный исследовательский Белгородский государственный университет, г. Белгород, Российская Федерация, аспирант кафедры математического анализа, e-mail: alexvassel@gmail.com

Vasilyev Aleksandr Vladimirovich, National Research Belgorod State University, Belgorod, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Mathematical Analysis Department, e-mail: alexvassel@gmail.com

УДК 517.951

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИЯХ СО СЛОЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

© В.Б. Васильев

Ключевые слова: псевдодифференциальное уравнение; многомерная краевая задача Римана; волновая факторизация; сложная граница.

Описывается конструкция общего решения модельного эллиптического псевдодифференциального уравнения в области многомерного пространства, представляющей собой объединение выпуклых конусов.

1. При исследовании псевдодифференциальных уравнений на многообразиях с краем важную роль играет локальный принцип, утверждающий, грубо говоря, что фредгольмовость уравнения вытекает из обратимости локальных представителей оператора, входящего в уравнение. Таким образом, для описания фредгольмовости уравнения нужно знание локальных представителей оператора, входящего в уравнение, в каждой точке многообразия (включая край) и условия обратимости этих локальных операторов. Такие локальные представители мы называем модельными, а области m-мерного пространства, диффеоморфные окрестности точки многообразия – каноническими. В зависимости от типа точки многообразия каноническая область выглядит по-разному, возможные варианты: $\mathbf{R}^m$ для внутренней точки, $\mathbf{R}^m_+$ для граничной точки гладкости, $C^a_+ = \{x \in \mathbf{R}^m : x = (x', x_m), x_m > a|x'|, a > 0\}$, $x' = (x_1, ..., x_{m-1})$, для конуса и т.д.

2. Нас будет интересовать разрешимость уравнения

$$(Au)(x) = f(x),\ x \in C_+, \tag{1}$$

в пространствах Соболева–Слободецкого $H^s(C_+)$, где C_+ – m-мерный конус, состоящий из объединения непересекающихся выпуклых конусов, $C_+ = \cup_{j=1}^n C_j$, где конус C_j имеет вид $C_+^{a_j}$ после поворота на соответствующий угол α_j, A – модельный эллиптический псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$ порядка α [1, 2]:

$$(Au)(x) = \int\limits_{C_+}\int\limits_{\mathbf{R}^m} A(\xi)\widetilde{u}(\xi)e^{i(x-y)\cdot\xi}d\xi dy.$$

Для каждого конуса $C_j, j=1,\dots,n,$ определим далее специальный многомерный сингулярный интеграл с помощью ядра Бохнера [1] формулой

$$(B_j u)(x) = \lim_{\tau\to 0+} \int\limits_{\mathbf{R^m}} B_j(x'-y', x_m - y_m + i\tau) u(y', y_m) dy' dy_m.$$

Этот сингулярный интеграл возникает как преобразование Фурье произведения характеристической функции конуса и некоторой суммируемой функции и тесно связан с многомерной задачей Римана в ее простейшем варианте. Он представляет собой одно из возможных многомерных обобщений интеграла типа Коши и соответственно преобразования Гильберта.

Приведем здесь основной результат для уравнения (1), опуская детали (их можно найти в [2, 3, 4] для случая одного выпуклого конуса). Общее решение может быть сконструировано следующим образом. Обозначим $Q_n(\xi)$ многочлен степени n, удовлетворяющий условию,

$$|Q_n(\xi)| \sim (1+|\xi|)^n,$$

обозначим $(m-1)$-мерное преобразование Фурье ($y' \to \xi'$ в смысле распределений) функции $e^{-ia|y'|\xi_m}$ посредством $E_a(\xi', \xi_m)$ и определим оператор

$$(V_a \widetilde{u})(\xi') = (E_a * \tilde{u})(\xi) \equiv \int\limits_{\mathbf{R}^{m-1}} E_a(\xi' - \eta', \xi_m) \widetilde{u}(\eta', \xi_m) d\eta'.$$

Обозначим $\mathcal{T}_k$ – вращение пространства $\mathbf{R}^m$, переводящий конус C_k в конус $C_+^{a_k}$. Составим n вспомогательных многомерных задач Римана [1], предполагая, что $W(\xi) \neq = 0,\ \forall \xi \in \mathbf{R}^m$:

$$\widetilde{U}_k(\xi) = W(\xi)\widetilde{V}_k(\xi) + \widetilde{w}_k(\xi),\ k=1,\dots,n, \quad W(\xi) = -\frac{1}{n}\left(A(\xi) - \frac{n-1}{n}\right)^{-1},$$

с произвольно выбранными правыми частями $\widetilde{w}_k(\xi) \in \widetilde{H}^s(\mathbf{R}^m)$. Предположим, что $W(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно C_k с индексом $æ_k$, $æ_k - s = n_k + \delta, n_k \in \in \mathbf{N}, |\delta| < 1/2$, и обозначим элементы волновой факторизации [1] символа $W(\xi)$ относительно конуса C_k посредством $W_{k,\neq}(\xi), W_{k,=}(\xi)$.

Т е о р е м а. *Общее решение уравнения (1) в образах Фурье выражается формулой*

$$\widetilde{u}_+(\xi) = \sum_{k=1}^{n} W_{k,\neq}^{-1}(\xi) Q_{n_k}(\xi) B_k Q_{n_k}^{-1}(\xi) W_{k,=}^{-1}(\xi)\widetilde{w}_k(\xi) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} W_{k,\neq}^{-1}(\xi)\mathcal{T}_k^{-1} V_{-a_k} F\left(\sum_{j=1}^{n_k} c_j(x')\delta^{(j-1)}(x_m)\right),$$

где $c_j(x') \in H^{s_j}(\mathbf{R}^{m-1})$ *– произвольные функции,* $s_j = s - æ_k + j - 1/2,\ j=1,2,...,n_k,\ k = = 1,\dots,n,\ lf$ *– произвольное продолжение* f *на* $H^{s-\alpha}(\mathbf{R}^m)$.

Таким образом, чтобы описать конструкцию решения уравнения (1), нужно решить соответствующую вспомогательную задачу для каждого конуса $C_k, k=1,\dots,n,$ отдельно, причем для специального «составного» символа потребуется волновая факторизация относительно каждого конуса C_k с индексом $æ_k$. Отметим, что этот символ $W(\xi)$ по своей структуре напоминает исходный символ $A(\xi)$. Кроме этого, вычисления, проведенные в

[5], позволяют надеяться на получение содержательных результатов о разрешимости модельного уравнения (1) для случая сложных особенностей, содержащих «тонкие» конусы меньшей размерности, чем размерность пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев В.Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения. волноваяфакторизация. краевые задачи. 2-е изд. М.: КомКнига, 2010.

2. *Васильев В.Б.* Обратимость псевдодифференциальных операторов в многомерных конусах // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. № 5. С. 2468-2470.

3. *Vasilyev V.B.* On certain elliptic problems for pseudo differential equations in a polyhedral cone // Adv. Dyn. Syst. Appl. 2014. V. 9. № 2. P. 227-237.

4. *Vasilyev V.B.* New constructions in the theory of elliptic boundary value problems // In: Integral Methods in Science and Engineering. Proc. IMSE Conference, Karlsruhe, Germany, 2014. Birkhäuser, Basel, 2015. P. 573-584.

5. *Васильев В.Б.* Псевдодифференциальные уравнения, сингулярные интегралы и распределения // Прикладная математика и математическая физика. Москва, 2015. Т. 1. № 1. С. 3-18.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Липецкой области, проект № 14-41-03595-р-центр-а.

Поступила в редакцию 7 мая 2015 г.

Vasilyev V.B. PSEUDO DIFFERENTIAL EQUATIONS ON MANIFOLDS WITH COMPLICATED BOUNDARY

One describes the framework of a general solution of a model elliptic pseudo differential equation in a domain of a multidimensional space, which is a union of convex cones.

Key words: pseudo differential equation; multivariable Riemann boundary value problem; wave factorization; complicated boundary.

Васильев Владимир Борисович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, e-mail: vbv57@inbox.ru

Vasilyev Vladimir Borisovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: vbv57@inbox.ru

УДК 517.935

О РЕКОНСТРУКЦИИ ВОЗДЕЙСТВИЯ В СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© **А.Ю. Вдовин, С.С. Рублева**

Ключевые слова: динамический регуляризирующий алгоритм; обратные задачи динамики.

Предлагается динамический подход построения воздействия в существенно нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом для его реализации указываются дополнительные условия, которыми должна обладать система.