

УДК 51-77

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2143-2145

ОБ ЭФФЕКТЕ ГЮЙГЕНСА В НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДА

© Т.В. Азарнова, Т.Н. Гоголева, И.П. Половинкин,
С.А. Рабеах, И.Н. ЩепинаВоронежский государственный университет
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: polovinkin@yandex.ru

Рассматривается макроэкономическая модель Т. Пу, описывающая колебания валового дохода в заданном регионе. Согласно принципу Гюйгенса, имеющему место при особом сочетании норм сбережений и инвестирования, отклонения дохода будут иметь место лишь в течение конечного промежутка времени, после которого доход вернется к стационарному состоянию. Результаты исследования модели с помощью статистических методов анализа данных позволяют говорить о правдоподобности гипотезы о наличии эффекта Гюйгенса в определенные периоды истории отечественной экономики.

Ключевые слова: линейное уравнение распределение дохода; макроэкономическая модель Т. Пу; принцип Гюйгенса

В теории гиперболических уравнений в частных производных, описывающих волновые процессы, известно явление под названием «принцип Гюйгенса». Мы придерживаемся его геометрического определения по Ж. Адамару в терминологии И.Г. Петровского [1, с. 353–354]. Задача Коши для гиперболического уравнения удовлетворяет принципу Гюйгенса, если для каждой точки пространства размерность области зависимости решения от начальных данных (которая определяется как дополнение к объединению всех лагун) меньше размерности пространства. Это явление имеет место для трехмерного волнового уравнения, описывающего распространение звука и света. Оно проявляется в том, что колебания, вызванные локализованным источником, происходят в течение конечного промежутка времени без последующего, так что волна имеет резкий задний и резкий передний фронты. Экономическая теория признает волнообразный характер развития экономических систем. В связи с этим представляется уместным задаться вопросом о возможности проявления принципа Гюйгенса в экономике.

Отправной для нас является макроэкономическая модель движения доходов, предложенная в монографии Т. Пу [2]. Пусть $Y = Y(x, y, t)$ – отклонение уровня дохода от невозмущенного состояния в точке с координатами (x, y) в момент времени t , $S = S(t)$ – сбережения, $I = I(x, y, t)$ инвестиции, норма инвестиций $v = v(t)$ и норма сбережений $s = s(t)$ задаются экзогенно. Следуя [2], мы строим модель из следующих предположений:

$$S = s \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = \alpha I - sY, \quad \frac{\partial I}{\partial t} = v \frac{\partial Y}{\partial t} - \beta I. \quad (1)$$

В [2] s и v являются постоянными величинами, $\alpha = \beta = 1$; мы же, следуя [3], считаем s и v зависящими от времени, α и β а priori считаем положительными гладкими функциями переменной t (в дополнение к [2–3]). Если к предположениям (1) добавить предположение о межрегиональной торговле, то [2] в первом приближении активное торговое сальдо будет определяться выражением

$$m\Delta Y = m \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

где m характеризует склонность к импортированию. Из предположений (1) и (2) получим уравнение дохода

$$\alpha \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - (\alpha^2 v - \alpha \cdot s + \alpha - \alpha\beta) \frac{\partial Y}{\partial t} - (\alpha s - \alpha \cdot \beta \cdot s - \alpha \frac{ds}{dt}) Y = m\Delta Y. \quad (3)$$

Если считать α и β постоянными, а нормы сбережений и инвестиций задать соответственно с помощью формул

$$s = s(t) = s_0 \cdot e^{-\beta \cdot t}, \quad v = v(t) = \frac{s_0 e^{-\beta \cdot t} + \beta - \frac{1}{t}}{\alpha}, \quad (4)$$

то уравнение (3) примет вид:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \frac{1}{t} \frac{\partial Y}{\partial t} = m \Delta Y. \quad (5)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция

$$Y(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x + \sqrt{m} \cdot t \cdot \cos \theta, y + \sqrt{m} \cdot t \cdot \sin \theta) d\theta \quad (6)$$

(среднее от функции $\varphi(x, y)$ по окружности $S_{\sqrt{mt}}(x, y)$)

с центром в точке (x, y) и радиусом \sqrt{mt} является регулярным решением уравнения (5) и удовлетворяет начальным условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0+} Y(x, y, t) = \varphi(x, y), \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\partial Y}{\partial t}(x, y, t) = 0. \quad (7)$$

Из формулы (6) следует, что областью зависимости решения от начальных данных, заданных на плоскости (размерности 2), является окружность $S_{\sqrt{mt}}(x, y)$

(размерности 1). Это означает, что задача Коши (5), (7) удовлетворяет принципу Гюйгенса. Отсюда вытекает, что начальное отклонение дохода, локализованное территориально, повлечет за собой в точках плоскости отклонение дохода, локализованное во времени, т. е. отклонения дохода в этих точках будут иметь место лишь в течение конечного промежутка времени, после которого доход вернется к стационарному состоянию. Другими словами, краткосрочный локальный шок приводит к краткосрочным изменениям в активности близлежащих субъектов, но не приводит к выходу этих субъектов на новый уровень развития.

Закономерно возникает вопрос о возможности создания условий и/или реально существующем периоде, для которых нормы сбережений и инвестиций могли бы описываться формулами (4). Вполне возможно, что

при определенном воздействии некоторого центра на поведение экономических агентов эти условия могут сложиться. Конечно, подобная динамика может быть просто случайным или закономерным продуктом развития рыночной экономики без вмешательства извне.

На основе качественного экономического анализа можно полагать, что это имело место для России в 1993–1998 гг. Используя данные Росстата [4] о ВВП и валовых сбережениях за указанный период, мы рассчитали темп падения нормы сбережений, и оказалось, что она падала в геометрической прогрессии (дискретная реализация показательной функции). Это позволяет говорить о *возможном* наличии эффекта Гюйгенса в отечественной экономике в те годы. Следует, однако, заметить, что проверка выполнения формулы (4) для нормы инвестиций – задача более сложная, т. к. неясен способ выбора начала отсчета (из-за знаменателя t) и экономическое толкование требует дальнейшего осмысления.

Нам представляется, что исследование эффекта Гюйгенса в экономике могло бы помочь в изучении влияния управляющих воздействий на реакцию экономической системы в краткосрочном и долгосрочном аспектах, в т. ч. в анализе отдельных макроэкономических рынков, включая рынок труда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петровский И.Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. О диффузии волн и лагунах для гиперболических уравнений. М.: Наука, 1986. 499 с.
2. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика / пер. с англ. Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 2000. 200 с.
3. Половинкин И.П. К исследованию линейной модели Т. Пу динамики доходов с учетом межрегиональной торговли // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 6. С. 902-903.
4. Социально-экономические показатели РФ в 1992–2008 гг. Сайт федеральной службы государственной статистики. URL: www.gks.ru/doc_2009/year09_pril.xls (дата обращения: 18.07.2016).

БЛАГОДАРНОСТИ: Исследования проводятся при поддержке гранта РФФИ №16-06-00535.

Поступила в редакцию 4 августа 2016 г.

Азарнова Татьяна Васильевна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, доцент, зав. кафедрой математических методов исследования операций, e-mail: polovinkin@yandex.ru

Гоголева Татьяна Николаевна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор экономических наук, профессор, зав. кафедрой экономической теории и мировой экономики, e-mail: polovinkin@yandex.ru

Половинкин Игорь Петрович, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического и прикладного анализа, e-mail: polovinkin@yandex.ru

Рабеева Светлана Александровна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант, кафедра математического и прикладного анализа, e-mail: srabeeakh@mail.ru

Щепина Ирина Наумовна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор экономических наук, доцент, кафедра информационных технологий и математических методов в экономике, e-mail: shchepina@mail.ru

UDC 51-77

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2143-2145

ON HUYGENS' EFFECT IN THE CONTINUAL MODEL OF DISTRIBUTION

© T.V. Azarnova, T.N. Gogoleva, I.P. Polovinkin,
S.A. Rabeeakh, I.N. Shchepina

Voronezh State University

1 Universitetskaya Sq., Voronezh, Russian Federation, 394018

E-mail: polovinkin@yandex.ru

The macroeconomic model of T. Puu, which describes fluctuations of gross revenue in the set region is considered. According to Huygens's principle, which takes place at a special combination of norms of savings and investments, the deviations of the return will take place only for a limited period after the return will get back to a steady state. The results of the researched model by using statistical methods of data analysis suggest the plausibility of a hypothesis existence of Huygens's effect during certain historical periods of Russian economics.

Key words: linear equation of return distribution; T. Puu's macroeconomic model; Huygens's effect

REFERENCES

1. Petrovskiy I.G. *Izbrannye trudy. Sistemy uravneniy s chastnymi proizvodnymi. Algebraicheskaya geometriya. O diffuzii voln i lakunakh dlya giperbolicheskikh uravneniy* [The selected works. System of equations with partial derivatives. Algebraic geometry. About the diffusion of waves and lacunes for hyperbolic equations]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 499 p. (In Russian).
2. Pu T. Nelineynaya ekonomicheskaya dinamika [Non-linear economical dynamics]. Izhevsk, Publishing House "Udmurt University", 2000. 200 p. (In Russian).
3. Polovinkin I.P. K issledovaniyu lineynoy modeli T. Pu dinamiki dokhodov s ucheto mezhregional'noy trgovli [To the study of linear model of T. Puu dynamics flow of income taking into consideration interregional trade]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 6, pp. 902-903. (In Russian).
4. *Sotsial'no-ekonomicheskie pokazateli RF v 1992–2008 gg. Sayt federal'noy sluzhby gosudarstvennoy statistiki* [Social-economical indices of Russian federation in 1992–2008. The website of federal service of state statistics]. Available at: www.gks.ru/doc_2009/year09_pril.xls (accessed 18.07.2016). (In Russian).

GRATITUDE: The research is carried out under support of RFFFR grant no. 16-06-00535.

Received 4 August 2016

Azarnova Tatyana Vasilevna, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, Doctor of Technics, Associate Professor, Head of Mathematical Methods of Operations Research Department, e-mail: polovinkin@yandex.ru

Gogoleva Tatiana Nikolaevna, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, Doctor of Economics, Professor, Head of Economic Theory and World Economy Department, e-mail: polovinkin@yandex.ru

Polovinkin Igor Petrovich, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of Mathematics and Applied Analysis Department, e-mail: polovinkin@yandex.ru

Rabeeakh Svetlana Aleksandrovna, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, Post-graduate Student of Mathematics and Applied Analysis Department, e-mail: srabeeakh@mail.ru

Shchepina Irina Naumovna, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, Doctor of Economics, Associate Professor, Associate Professor of Information Technology and Mathematical Methods in Economics Department, e-mail: shchepina@mail.ru

Информация для цитирования:

Азарнова Т.В., Гоголева Т.Н., Половинкин И.П., Рабеев С.А., Щепина И.Н. Об эффекте Гюйгенса в непрерывной модели распределения дохода // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2143-2145. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2143-2145

Azarnova T.V., Gogoleva T.N., Polovinkin I.P., Rabeeakh S.A., Shchepina I.N. Ob effekte Gyuyensa v nepreryvnoy modeli raspredeleniya dokhoda [On Huygens' effect in the continual model of distribution]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 2143-2145. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2143-2145 (In Russian).