

УДК 517.977.1

DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-1-13-18

О РАЗРЕШИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С НЕЯВНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СВЯЗЬЮ И КРАЕВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© З. Т. Жуковская

Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: zyxra2@yandex.ru

Рассмотрены управляемые системы с неявной дифференциальной связью и краевыми ограничениями. В терминах накрывающих и липшицевых отображений получены достаточные условия существования решений.

Ключевые слова: управляемая система; краевая задача; накрывающее отображение

1. Постановка задачи

Пусть заданы число $T > 0$, множество $U \subset \mathbb{R}^s$ отображение $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^k$ и многозначное отображение $G: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ (здесь под многозначным отображением будем понимать отображение, которое каждой точке области определения ставит в соответствие некоторое непустое замкнутое множество). Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{cases} f(t, x, \dot{x}, u(t)) = 0 & \forall t \in [0, T], \\ u(t) \in U & \forall t \in [0, T], \\ 0 \in G(x(0), x(T)). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\dot{\cdot}$ означает "для почти всех". Обозначим через L_∞^n множество всех измеримых существенно ограниченных функций $v: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, а через AC_∞^n – множество всех абсолютно непрерывных функций $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, что $\dot{x}(\cdot) \in L_\infty^n$. Здесь и далее через $\dot{x}(t)$ мы обозначаем производную функции x в точке $t \in (0, T)$. Под *решением задачи (1)* мы будем понимать пару $(x(\cdot), u(\cdot)) \in AC_\infty^n \times L_\infty^n$ такую, что $f(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)) = 0$ для почти всех $t \in [0, T]$, $u(t) \in U$ для почти всех $t \in [0, T]$ и $0 \in G(x(0), x(T))$.

Далее относительно задачи (1) мы будем предполагать, что

- отображение $f(\cdot, x, v, u)$ измеримо для всех $(x, v, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$;
- отображение $f(t, \cdot)$ непрерывно для почти всех $t \in [0, T]$;
- для каждого $R > 0$ существует число $M > 0$ такое, что

$$|x| + |v| + |u| \leq R \Rightarrow |f(t, x, v, u)| \leq M \quad \forall t \in [0, T];$$

- многозначное отображение $G(\cdot)$ непрерывно;

- множество U компактно.

Прежде, чем сформулировать основной результат настоящей работы, напомним некоторые определения и утверждения.

2. Вспомогательные сведения

Пусть (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) – метрические пространства, числа $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ заданы. Многозначное отображение $\Psi: X \rightrightarrows Y$ называется α -накрывающим, если

$$\forall x_0 \in X, y_0 \in \Psi(x_0), y \in Y \quad \exists x \in X: \quad y \in \Psi(x) \quad \text{и} \quad \rho_X(x_0, x) \leq \frac{\rho_Y(y_0, y)}{\alpha}.$$

Теория накрывающих отображений используется для изучения вопроса разрешимости абстрактных нелинейных уравнений и включений. В [1], [2], [3], [4] накрывающие отображения использовались для получения условий существования решений абстрактных уравнений и включений и исследования свойств точек совпадения отображений в метрических пространствах. В [5] накрывающие отображения использовались для выведения условий существования решений неявных обыкновенных дифференциальных уравнений. Средствами теории накрывающих отображений в [6] были исследованы неявные уравнения Вольтерра, а в [7], [8] – управляемые системы.

Многозначное отображение $\Psi: X \rightrightarrows Y$ будем называть *непрерывным*, если оно непрерывно в смысле расстояния по Хаусдорфу h_Y . Расстояние по Хаусдорфу $h_Y(A, B)$ между непустыми множествами $A, B \subset Y$ определяется равенством

$$h_Y(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \rho_Y(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \rho_Y(a, b) \right\}.$$

Таким образом, непрерывность многозначного отображения $\Psi: X \rightrightarrows Y$ равносильна тому, что для любой точки $x \in X$ и любой сходящейся к ней последовательности $\{x_n\} \subset X$ выполняется соотношение $h_Y(\Psi(x_n), \Psi(x)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Многозначное отображение $\Psi: X \rightrightarrows Y$ называется β -липцевым, если

$$h_Y(\Psi(x), \Psi(u)) \leq \beta \rho_X(x, u) \quad \forall x, u \in X.$$

Многозначное отображение $\Psi: [0, T] \rightrightarrows \mathbb{R}^k$, принимающее компактные значения, называется *измеримым*, если для любого открытого множества $V \subset \mathbb{R}^k$ множество

$$\Psi^{-1}(V) := \{t \in [0, T] : \Psi(t) \cap V \neq \emptyset\}$$

измеримо по Лебегу.

Пусть дано многозначное отображение $F: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^k$. Предположим, что

- отображение $F(\cdot, x, u)$ измеримо для всех $x, u \in \mathbb{R}^n$;
- отображение $F(t, \cdot)$ непрерывно для почти всех $t \in [0, T]$;
- для каждого $R > 0$ существует число $M > 0$ такое, что

$$|x| + |u| \leq R \Rightarrow |y| \leq M \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall y \in F(t, x, u).$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} 0 \in F(t, x, \dot{x}) & \forall t \in [0, T], \\ 0 \in G(x(0), x(T)). \end{cases} \quad (3)$$

Под решением задачи (3) будем понимать функцию $x(\cdot) \in AC_\infty^n$ такую, что $0 \in F(t, x(t), \dot{x}(t))$ для почти всех $t \in [0, T]$ и $0 \in G(x(0), x(T))$. Сформулируем достаточные условия существования решения задачи (1).

Т е о р е м а 1 (см. [9]). *Предположим, что*

- a) *многозначное отображение $F(t, x, \cdot)$ является α_F -накрывающим при почти всех $t \in [0, T]$, при всех $x \in \mathbb{R}^n$;*
- b) *многозначное отображение $F(t, \cdot, u)$ является β_F -липшицевым при почти всех $t \in [0, T]$, при всех $u \in \mathbb{R}^n$;*
- c) *многозначное отображение $G(\cdot, b)$ является α_G -накрывающим при всех $b \in \mathbb{R}^n$;*
- d) *многозначное отображение $G(a, \cdot)$ является β_G -липшицевым при всех $a \in \mathbb{R}^n$.*

Если

$$\frac{\beta_F}{\alpha_F}T + \frac{\beta_G}{\alpha_G} < 1, \quad (4)$$

то задача (3) имеет решение.

З а м е ч а н и е. Отметим, что теорема 1 выводится из леммы 2 из [9]. Из неё же следует, что в предположениях теоремы 1 не только существует решение задачи (3), но, более того, для любого $\varepsilon > 0$, для любых функции $x_0 \in AC_\infty^n$, $y_0 \in L_\infty^k$ таких, что $y_0(t) \in F(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \quad \forall t$, для любого вектора $v_0 \in G(x_0(0), x_0(T))$ существует такое решение $x \in AC_\infty^n$ задачи (3), что

$$\begin{aligned} \|\dot{x} - \dot{x}_0\|_{L_\infty^n} &\leq \frac{\beta_F|v_0| + (\alpha_G - \beta_G)\|y_0\|_{L_\infty^m}}{\alpha_G\alpha_F - \alpha_F\beta_G - T\alpha_G\beta_F} + \varepsilon, \\ |x(0) - x_0(0)| &\leq \frac{(\alpha_F - \beta_F T)|v_0| + T\beta_G\|y_0\|_{L_\infty^m}}{\alpha_G\alpha_F - \alpha_F\beta_G - T\alpha_G\beta_F} + \varepsilon. \end{aligned}$$

3. Основной результат

Т е о р е м а 2. *Предположим, что*

- a) *отображение $f(t, x, \cdot, u)$ является α_f -накрывающим при почти всех $t \in [0, T]$, при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^s$;*
- b) *многозначное отображение $f(t, \cdot, v, u)$ является β_f -липшицевым при почти всех $t \in [0, T]$, при всех $v \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^s$;*
- c) *многозначное отображение $G(\cdot, b)$ является α_G -накрывающим при всех $b \in \mathbb{R}^n$;*
- d) *многозначное отображение $G(a, \cdot)$ является β_G -липшицевым при всех $a \in \mathbb{R}^n$.*

Если

$$\frac{\beta_f}{\alpha_f}T + \frac{\beta_G}{\alpha_G} < 1, \quad (5)$$

то задача (1) имеет решение.

Доказательство. Определим многозначное отображение $F: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ по формуле

$$F(t, x, v) := f(t, x, v, U) \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall (x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Покажем, что построенное таким образом многозначное отображение F удовлетворяет всем предположениям теоремы 1.

Поскольку образ компакта при непрерывном отображении является компактом, то множество $F(t, x, v)$ компактно при почти всех $t \in [0, T]$, для всех $(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Из непрерывности отображения $f(t, \cdot)$ следует, что многозначное отображение $F(t, \cdot)$ непрерывно (см. теорему 1.3.13 из [10]). Из измеримости отображения f по переменной t следует измеримость многозначного отображения $F(\cdot, x, v)$ для всех $(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (см. §1.5.2 из [10]). Из компактности

множества U и того, что отображение f переводит ограниченное множество в ограниченное, следует, что для каждого $R > 0$ существует число $M > 0$ такое, что

$$|x| + |u| \leq R \Rightarrow |y| \leq M \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall y \in F(t, x, u).$$

Из β_f -липшицевости отображения f по переменной x следует, что многозначное отображение F является β_f -липшицевым по x . Действительно, для почти всех $t \in [0, T]$, для всех $v, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $y_1 \in F(t, x_1, v)$ существует $u \in U$ такое, что $y_1 = f(t, x_1, v, u)$. Положим $y_2 := f(t, x_2, v, u)$. Тогда $y_2 \in F(t, x_2, v)$ и

$$|y_1 - y_2| = |f(t, x_1, v, u) - f(t, x_2, v, u)| \leq \beta |x_1 - x_2|.$$

Следовательно,

$$h_{\mathbb{R}^k}(F(t, x_1, v), F(t, x_2, v)) \leq \beta_f |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Значит, многозначное отображение F является β_f -липшицевым по переменной x .

Из α_f -накрываемости отображения f по переменной $\dot{x}$ следует, что многозначное отображение F является α_f -накрывающим по $\dot{x}$. Действительно, для почти всех $t \in [0, T]$, для всех $x, v_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in F(t, x, v_0)$ существует $u \in U$ такое, что $y_0 = f(t, x, v_0, u)$. Из α_f -накрываемости отображения $f(t, x, \cdot, u)$ следует, что для любого $y \in \mathbb{R}^k$ существует $v \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$y = f(t, x, v, u) \quad \text{и} \quad |v - v_0| \leq \frac{|y - f(t, x, v_0, u)|}{\alpha_f}.$$

Значит, $y \in F(t, x, v)$ и

$$|v - v_0| \leq \frac{|y - y_0|}{\alpha_f}.$$

Следовательно, многозначное отображение F является α_f -накрывающим по переменной $\dot{x}$.

Итак, доказано, что F удовлетворяет предположениям теоремы 1. Многозначное отображение G тоже удовлетворяет предположениям теоремы 1. Кроме того, выполняется неравенство (5). Поэтому из теоремы 1 следует, что задача (3) имеет решение $x(\cdot) \in AC_\infty^n$. Значит

$$0 \in f(t, x(t), \dot{x}(t), U) \quad \forall t \in [0, T], \quad 0 \in G(x(0), x(T)).$$

Из первого включения и леммы Филиппова (см., например, теорему 1.5.15 в [10]) следует, что существует измеримая функция $u(\cdot)$ такая, что

$$0 \in f(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)), \quad u(t) \in U \quad \forall t \in [0, T].$$

Функция $u(\cdot)$ является существенно ограниченной, поскольку множество U компактно. Таким образом, пара $(x(\cdot), u(\cdot))$ является решением задачи (1). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // ДАН. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
2. Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Appl. 2009. V. 5. № 1. P. 105–127.
3. Арутюнов А.В. Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Математические заметки. 2009. Т. 86. № 2. С. 163–169.
4. Арутюнов А.В., Гельман Б.Д. О структуре множества точек совпадения // Математический сборник. 2015. Т. 206. № 3. С. 35–56.
5. Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.
6. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Anal. 2012. V. 75. № 3. P. 1026–1044.

7. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E.* Existence of local solutions in constrained dynamic systems // *Applicable Analysis*. 2011. V. 90. Iss. 6. P. 889–898.

8. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* К вопросу о разрешимости управляемых дифференциальных систем // *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 1. С. 49–54.

9. *Жуковский С.Е., Жуковская З.Т.* Разрешимость краевых задач для неявных дифференциальных включений // *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 1983–1989. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1983-1989

10. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 16-31-50044), гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ, № НШ-8215.2016.1 и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых ученых МК-1938.2017.1.

Поступила в редакцию 24 января 2017 г.

Жуковская Зухра Тагировна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: zuxra2@yandex.ru

UDC 517.977.1

DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-1-13-18

ON THE SOLVABILITY OF CONTROL SYSTEMS WITH IMPLICIT DYNAMICS AND ENDPOINT CONSTRAINTS

© Z. T. Zhukovskaya

The Peoples' Friendship University of Russia
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: zuxra2@yandex.ru

Control systems with implicit dynamics and endpoint constraints are considered. For these systems, sufficient solvability conditions are obtained in the terms of Lipschitz and covering mappings.

Key words: control system; boundary value problem; covering mapping

REFERENCES

1. *Arutyunov A.V.* Nakryvayushchie otobrazheniya v metricheskikh prostranstvakh i nepodvizhnye tochki // *DAN*. 2007. T. 416. № 2. S. 151–155.
2. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // *J. Fixed Points Theory and Appl.* 2009. V. 5, № 1. P. 105–127.
3. *Arutyunov A.V.* Uстойчивость toчек совпадения i svoystva nakryvayushchih otobrazhenij // *Matematicheskie zametki*. 2009. T. 86. № 2. S. 163–169.
4. *Arutyunov A.V., Gel'man B.D.* O strukture mnozhestva toчек совпадения // *Matematicheskiy sbornik*. 2015. T. 206. № 3. S. 35–56.
5. *Arutyunov A.V., Avakov E.R., Zhukovskiy E.S.* Nakryvayushchie otobrazheniya i ih prilozheniya k differentsial'nym uravneniyam, ne razreshennym otnositel'no proizvodnoj // *Differentsial'nie uravneniya*. 2009. T. 45. № 5. S. 613–634.

6. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // *Nonlinear Anal.* 2012. V. 75. № 3. P. 1026–1044.
7. Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E. Existence of local solutions in constrained dynamic systems // *Applicable Analysis*. 2011. V. 90. Iss. 6. P. 889–898.
8. Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. K voprosu o razreshimosti upravlyaemykh differentsial'nykh sistem // *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2013. T. 18. Vyp. 1. S. 49–54.
9. Zhukovskiy S.E., Zhukovskaya Z.T. Razreshimost' kraevykh zadach dlya neyavnykh differentsial'nykh vklucheniy // *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016. T. 21. Vyp. 6. S. 1983–1989. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1983-1989
10. Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazheniy i differentsial'nykh vklucheniy*. M.: KomKniga, 2005.

ACKNOWLEDGEMENTS: The paper is supported by the RFBR grant (project No 16-31-50044), grant of the President of the Russian Federation for state support of the leading scientific schools (No. NSh-8215.2016.1) and grant of the President of the Russian Federation for state support of the young scientists MK-1938.2017.1.

Received 24 January 2017

Zhukovskaya Zukhra Tagirovna, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: zyxra2@yandex.ru

Информация для цитирования:

Жуковская З.Т. О разрешимости управляемых систем с неявной дифференциальной связью и краевыми ограничениями // *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 1. С. 13–18. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-1-13-18

Zhukovskaya Z.T. O razreshimosti upravlyаемykh sistem s neyavnoy differentsial'noy svyazyu i kraevimi ogranicheniyami [On the solvability of control systems with implicit dynamics and endpoint constraints]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 1, pp. 13–18. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-1-13-18 (In Russian)